

Referate.

Grundlagenfragen.

Carnap, Rudolf: Die logizistische Grundlegung der Mathematik. (2. Tag. f. Erkenntnislehre d. exakt. Wiss., Königsberg, Sitzg. v. 5.—7. IX. 1930.) Erkenntnis zugl. Ann. Philosoph. 2, 91—105 u. 135—155 (1931).

Dieser Vortrag bringt außer einer sehr klaren Darstellung des logizistischen Standpunktes auch eine ausführliche Darlegung der heute noch bestehenden Schwierigkeiten und einen Versuch zu deren Überwindung. Die These des Logizismus besagt zweierlei, nämlich 1. daß sich sämtliche mathematische Begriffe durch explizite Definition auf die logischen zurückführen lassen, 2. daß sämtliche mathematischen Sätze aus den logischen Grundsätzen deduktiv ableitbar sind. Der Sinn dieser beiden Behauptungen wird näher präzisiert und an Beispielen (Begriff der natürlichen und der reellen Zahl) erläutert. Bezüglich des zweiten Punktes wird auf die Schwierigkeit hingewiesen, die durch das Unendlichkeits- und das Auswahlaxiom entsteht, da diese beiden Axiome wegen ihres existenzialen Charakters nicht zu den logischen Grundsätzen gehören, aber zum Beweise vieler mathematischer Sätze erforderlich sind. Doch könne man diese Schwierigkeit leicht überwinden, indem man, wie Russell es tut, die genannten Axiome in die Voraussetzungen der betreffenden Sätze aufnimmt, wodurch man rein logisch beweisbare Sätze erhält. Eine viel wesentlichere Schwierigkeit liegt, wie Verf. ausführt, in den sog. imprädikativen Begriffsbildungen. Um den bei dieser Definitionsart scheinbar auftretenden Zirkel zu vermeiden, stellte Russell seine „verzweigte“ Typentheorie auf, durch welche aber eine adäquate Behandlung der reellen Zahlen unmöglich wird, wenn man nicht zu dem (heute allgemein als unzulässig erkannten) Reduzibilitätsaxiom seine Zuflucht nimmt. Die Lösung der Schwierigkeit sucht Verf. in der Weglassung der verzweigten Typentheorie, die deshalb überflüssig sei, weil die imprädikativen Definitionen in Wahrheit gar keinen Zirkel enthalten. Auch F. P. Ramsey habe diesen Standpunkt zu begründen versucht, doch seien seine Argumente wegen des ihnen zugrunde liegenden Begriffsabsolutismus (Platonismus) unannehmbar. Verf. sucht auf einem anderen Wege die Zulässigkeit der imprädikativen Definitionen darzutun und erläutert dies an dem Begriff der induktiven Zahl. Eine Zahl heißt bekanntlich induktiv, wenn ihr jede „erbliche“ Eigenschaft zukommt, die der Null zukommt. Scheinbar geht in diese Definition die Gesamtheit aller Eigenschaften von Zahlen und daher auch die zu definierende Eigenschaft selbst ein (worin eben der vermeintliche Zirkel besteht). Dieser Anschein verschwindet aber, wenn man das Wort „jede“ nicht extensional, im Sinn von „jede einzelne“ auffaßt, sondern die obige Definition so interpretiert: Eine Zahl n heißt induktiv, wenn aus der Voraussetzung, eine Eigenschaft sei erblich und komme der Null zu, logisch folgt, daß sie der Zahl n zukommt. Den Unterschied dieser beiden Bedeutungen von „jedes“ charakterisiert Verf. (im Anschluß an F. Kaufmann) durch die Worte „numerische“ und „spezifische“ Allgemeinheit. — Was die logischen Paradoxien betrifft, die für Russell auch einer der Gründe für die Aufstellung der verzweigten Typentheorie waren, so verweist Verf. auf die diesbezüglichen Untersuchungen von Ramsey, der gezeigt habe, daß die in logischen Zeichen überhaupt darstellbaren Antinomien schon durch die einfache Typentheorie ausgeschlossen werden. K. Gödel (Wien).

Heyting, Arend: Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. (2. Tag. f. Erkenntnislehre d. exakt. Wiss., Königsberg, Sitzg. v. 5.—7. IX. 1930.) Erkenntnis zugl. Ann. Philosoph. 2, 106—115 u. 135—155 (1931).

Verf. setzt zunächst die philosophische Einstellung des Intuitionisten auseinander. Für diesen ist die Mathematik natürliche Funktion des Intellekts, Erzeugnis des menschlichen Geistes, und daher spricht er den mathematischen Gegenständen keine objektive, vom Denken unabhängige Existenz zu. Aus dieser Auffassung, daß die mathematischen Objekte nur insofern vorhanden sind, als sie vom menschlichen Denken tatsächlich erfaßt werden können, ergibt sich die Ablehnung reiner Existenzialbeweise sowie des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in allen den Fällen, wo eine Entscheidung der Alternative nicht tatsächlich herbeigeführt werden kann. — Der intuitionistische Aufbau der Mathematik wird an mehreren Beispielen illustriert. Zunächst wird die Brouwersche Definition der reellen Zahl und der Begriff der Wahlfolge erläutert. Dieser Begriff er-

setzt, wie Verf. zeigt, nicht so sehr die einzelne reelle Zahl als vielmehr die Gesamtheit aller möglichen reellen Zahlen, bzw. Teilmengen dieser Gesamtheit, falls man die Wahlfreiheit irgendwie gesetzmäßig einschränkt. Ferner wird die Brouwersche Mengendefinition kurz besprochen und ein Beweis skizziert für den in der intuitionistischen Mathematik geltenden Satz: Wenn jeder reellen Zahl eine Nummer zugeordnet ist, so haben sie alle dieselbe Nummer. — Am Schluß des Vortrages kommt die intuitionistische Aussagenlogik zur Sprache. Es wird unterschieden zwischen Aussagen und Behauptungen (bei Frege und Russell durch das Zeichen \vdash angedeutet). Eine Aussage drückt eine Erwartung (Intention) aus, und zwar geht diese auf ein als möglich gedachtes Erlebnis; die entsprechende Behauptung bedeutet die Erfüllung der Intention. Z. B. bedeutet die Aussage „ C ist rational“ die Erwartung, man könne zwei ganze Zahlen a, b finden derart, daß $C = \frac{a}{b}$. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten drückt die Erwartung aus, man könne jeden mathematischen Satz entweder beweisen oder auf einen Widerspruch zurückführen, und ein Beweis für ihn wäre nur möglich durch Angabe einer allgemeinen Methode, welche es gestattet, diese Entscheidung immer herbeizuführen. Die Intentionen auf das Zutreffen und die Beweisbarkeit einer Aussage sind voneinander zu unterscheiden, wenn auch die zugehörigen Behauptungen gleichbedeutend sind. Falls man die beiden Aussagen negiert, sind auch die Behauptungen nicht mehr gleichbedeutend, und daraus folgert Verf., daß ein Beweis für die grundsätzliche Unentscheidbarkeit einer mathematischen Frage durchaus im Bereich des Möglichen liegt.

K. Gödel (Wien).

Neumann, Johann v.: Die formalistische Grundlegung der Mathematik. (2. Tag. f. Erkenntnislehre d. exakt. Wiss., Königsberg, Sitzg. v. 5.—7. IX. 1930.) Erkenntnis zugl. Ann. Philosoph. 2, 116—121 u. 135—155 (1931).

Das Ziel der formalistischen Grundlegung der Mathematik ist, wie Verf. ausführt, die Rechtfertigung der klassischen Mathematik bei Anerkennung der von den Intuitionisten gegen sie erhobenen Bedenken. In der Kritik der transfiniten (existentialen) Schlußweisen — für welche ein sehr instruktives Beispiel gegeben wird — stimmt daher der Formalist mit dem Intuitionisten überein, aber er richtet sein Augenmerk darauf, daß diese Schlußweisen, wenn sie nicht als Methoden des inhaltlichen Denkens, sondern als ein nach gewissen Konventionen verlaufendes Verfahren zur Ableitung von Formeln aufgefaßt werden, einen durchaus finiten Sinn erhalten, da ja die Formeln und die mit ihnen vollzogenen Operationen finiten Charakter haben. Die Beschreibung der Verfahren der klassischen Mathematik übernimmt der Formalismus zum großen Teil den Arbeiten der logistischen Schule, aber da er diese Verfahren nicht als inhaltlich einleuchtende Beweismethoden, sondern bloß als „Formelspiel“ ansieht, so entsteht für ihn die Aufgabe, die Brauchbarkeit dieses „Spiels“ für die Wissenschaft darzutun. Dies soll in der Weise geschehen, daß man zeigt: Jede in endlich vielen Schritten kontrollierbare (nachrechenbare) Zahlformel, die nach den Spielregeln der klassischen Mathematik abgeleitet werden kann, muß sich bei effektivem Nachrechnen als richtig herausstellen. Damit wäre die Verwendbarkeit der klassischen Mathematik zur abkürzenden Berechnung arithmetischer Ausdrücke dargetan, und gerade in diesem Sinn wird sie auf die Erfahrung angewandt. Der Beweis der oben bezeichneten Tatsache läuft auf den Beweis der Widerspruchsfreiheit hinaus, der daher das zentrale Problem ist. Er muß natürlich mit inhaltlich einwandfreien (d. h. intuitionistischen) Methoden geführt werden. Das für Widerspruchsfreiheitsbeweise angewendete Verfahren wird in seinen Grundzügen beschrieben und zum Schluß darauf hingewiesen, daß bisher ein Widerspruchsfreiheitsbeweis erst für gewisse beschränkte Teilsysteme der klassischen Mathematik geglückt ist. — Der Vortrag charakterisiert den Stand der Dinge im Zeitpunkt der Königsberger Tagung. Die seither erzielten Resultate über die Unmöglichkeit von Widerspruchsfreiheitsbeweisen mit geringeren Beweismitteln, als sie das System selbst formalisiert enthält, sind noch nicht berücksichtigt. K. Gödel.

Klein, Fritz: Zur Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Annalen 105, 308—323 (1931).

Verf. untersucht Dingbereiche, in denen zwei Operationen $a \cup b$, $a \cap b$ definiert sind und den Axiomen des Klassenkalküls für Summe und Durchschnitt genügen. Das Analogon zur Komplementbildung wird eingeführt als eindeutige symmetrische Abbildung des Bereiches in sich, durch welche die beiden Verknüpfungen \cup , \cap miteinander vertauscht werden. Als Realisierungen für die Axiome kommen außer Klassen- und Aussagenkalkül z. B. die Operationen $\max(a, b)$, $\min(a, b)$ oder gr. gem. Teiler, kl. gem. Vielfaches in Betracht. Nach Ableitung verschiedener einfacher Sätze (z. B. der Eindeutigkeit der Zerlegung der Elemente des Bereiches in Primelemente, falls eine solche Zerlegung überhaupt existiert) wird eine sog. „charakteristische“ Abbildung eingeführt. Darunter wird verstanden eine eindeutige Abbildung des Bereiches auf eine Abelsche Gruppe (oder eine Teilmenge einer solchen), welche folgender Bedingung genügt:

$$\{a \cup b\} = \{a\} + \{b\} - \{a \cap b\}, \quad (1)$$

(wobei mit $+$, $-$ die Gruppenoperation und ihre Inverse und mit $\{\}$ die abbildende Funktion bezeichnet ist). Ein Beispiel für eine solche Abbildung liefert der Begriff „Anzahl der Elemente“ für endliche Mengen, ferner viele zahlentheoretische Funktionen (Teilersumme, Teileranzahl usw.) bei der Deutung von \cap , \cup als gr. gem. Teiler, kl. gem. Vielfaches und der Multiplikation als Gruppenoperation. Die Relation (1) wird auf n Variable verallgemeinert und liefert in dieser Form neben anderen Anwendungen das Schema für das eratosthenische und ähnliche arithmetische Siebverfahren.

K. Gödel (Wien).

Schmidt, Arnold: Die Stetigkeit in der absoluten Geometrie. Sitzgsber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. Abh. 5, 1—8 (1931).

Zu der Abhandlung von Baldus: „Zur Axiomatik der Geometrie III“ werden über die verschiedenen Formulierungen des Cantorsche Axioms der Intervallschachtelung sowie über das Archimedische Axiom und seine beiden engeren Fassungen einige kritische und ergänzende Bemerkungen gemacht. R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Geschichtliches.

● **Sanford, Vera:** A short history of mathematics. London: Harrap 1931. 402 S. 10/6.

Neugebauer, O.: Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte. Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math. B 1, 413—451 (1931).

Zusammenstellung aller Quellen für unsere Kenntnis der vorgriechischen ägyptischen Geometrie. Es sind seit der Herausgabe des Moskauer Papyrus (Q S A 1) keine neuen Texte hinzugekommen. Man findet hier aber alles bekannte Material möglichst übersichtlich geordnet. Die entscheidenden Termini, deren Übersetzung nicht ganz selbstverständlich ist, sind unübersetzt gelassen. Die wichtigsten Textabschnitte sind wörtlich übersetzt; die Rechnung wird in moderner Symbolik gegeben. Alle Figuren sind auch photographisch reproduziert. Die Arbeit zerfällt in die folgenden Abschnitte: 1. Das Dreieck. Aufgaben R 51, M 4, 7, 17. *mrj. t* wird mit Struve aufgefaßt als Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks und anschaulich gedeutet als Grenze der beiden rechtwinkligen Teildreiecke. *tp rj*, Mündung, bedeutet die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks in Übereinstimmung mit der von Struve entdeckten Zeichenregel. 2. Das Viereck. Die Inschriften des Metengrabs beweisen nicht die Kenntnis der richtigen Bestimmung der Rechtecksfläche. Aufgaben R 49, M 6, 18, K 1 (als 3-dimensionales Problem aufzufassen), R 52 (als gleichschenkliges Trapez gedeutet), R 54, 55, rein metrologisch. 3. Polygone. R 53. Widerspruch zwischen Figur und Rechnung. B 1, als *h'*-Rechnung aufgefaßt. Die Flächeninhalte in der Schenkungsurkunde von Edfu. 4. Der Kreis. R 50. $\pi \approx \frac{256}{81}$. R 48. Die Ellipse. 5. Krumme Flächen. Neue Interpretation von M 10, wo Struve die Flächen-

bestimmung der Halbkugel, Peet die eines Halbzylinders liest.]] Verf. weist auf die Möglichkeit hin, an einen kuppelförmigen Speicher mit kreisförmiger Basis zu denken, die höher gewölbt ist als eine Halbkugel. M 10 kann nicht länger als Beweis für die Flächenbestimmung der Halbkugel in Ägypten gelten. Bemerkungen zur Approximation von $\frac{\pi}{4} \approx \kappa$. 6. Würfel und Quader. R 44, 45, 46. K 1. Aufgaben über Statuenaufstellung. Metrologisches. 7. Der Zylinder. R 41, 42. K 6. R 43. M 11 (Interpretation von Peet). 8. Die Pyramide, Kegel und Verwandtes. R 56 bis 60. M 14 (Volumen des geraden quadratischen Pyramidenstumpfes). Auslaufuhren. Berechnung der zum Transport einer Obeliske nötigen Arbeiter. Berechnung des Ziegelbedarfs für eine Rampe. 9. Bemerkung über zeichentechnische Dinge. 10. Verzeichnis der Termini. 11. Konkordanztabelle. *Dijksterhuis* (Oisterwijk).

Edwards, W. M.: The origin of mathematics in Greek culture. Math. Gaz. 15, 449—460 (1931).

Vortrag, dessen ursprünglicher Titel sehr gut den Inhalt charakterisiert: „The Atmosphere in which Greek Mathematics arose“. Auf eigentlich Mathematisches wird nicht eingegangen. *O. Neugebauer* (Göttingen).

Becker, Oskar: Die diairetische Erzeugung der platonischen Idealzahlen. Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math. B 1, 464—501 (1931).

Verf. verfolgt den Zweck, die von Stenzel aufgestellte diairetische Theorie der platonischen Idealzahlen weiter auszugestalten und damit dem trotz der Vorzüge des Stenzelschen Schemas im wesentlichen noch ungelösten Problem näherzukommen, was nun eigentlich die Idealzahlen sind und wie sie erzeugt werden. Auf Grund der von Aristoteles beschriebenen Erzeugung der idealen 2, 4, 8 (Spaltung jeder Einheit der jeweils vorhandenen Zahl in neue Einheiten) wird zuerst folgende These aufgestellt: Den Ideen im begriffsspaltenden Schema entsprechen die Einheiten der idealen Zahlen, nicht diese selbst. Diese These erfordert als erste Konsequenz die Lösung der Aufgabe, auch diejenigen Zahlen, die nicht Potenzen von 2 sind, diairetisch zu erzeugen. Diese Erzeugung gelingt, wenn man annimmt, daß jede gespaltene Einheit durch die Spaltung aufgehoben wird. Die Idealzahlen werden also nicht, wie die mathematischen, hervorgebracht durch sukzessive Addition einer neuen Einheit, sondern durch sukzessive Dichotomie schon vorhandener Monaden. Sie bilden ein diairetisches Geflecht, ein Schema, nach dem Zerlegung und Verflechtung der Ideen erfolgt. Die dieser Genesis eigentümliche Beweglichkeit wird in der antiken Philosophie begrifflich bewältigt durch das aristotelische Begriffspaar Dynamis-Energeia. Da die Idealzahlen unmittelbar das Schema einer diairetischen Ideenkette sind, wird es verständlich, daß in der aristotelischen Polemik die Probleme der „Einheit“ und der „Teile“ bei den Zahlen und bei den diairetischen Definitionen sich decken. Auch versteht man jetzt die aristotelischen Probleme der „zusammenwerfbaren“ und der „unzusammenwerfbaren“ Einheiten: sind z. B. die (aktuellen) Einheiten der idealen Zwei identisch mit den (potentiellen) Monaden der ersten Dyade in der idealen Vier? Es werden hiernach die Beziehungen der Idealzahlen zur griechischen Mathematik erörtert. Die normale diairetische Definition, graphisch dargestellt als sukzessive Halbierung einer Strecke, erweist sich mathematisch als identisch mit der Entwicklung eines gegebenen Logos in einen Dualbruch. Die Möglichkeit einer solchen Entwicklung zu Platos Zeit ist angesichts des dyadischen Charakters der ägyptischen Arithmetik unbezweifelbar. Daß die duale Entwicklung der Logoi in der überlieferten griechischen Mathematik nicht vorkommt, wird erklärt durch die Bemerkung, daß die Endlichkeit oder Unendlichkeit dieser Entwicklung nicht, wie das bei der *ἀνθρῳποιγεσις* der Fall ist, ein Kriterium für Rationalität oder Irrationalität eines Logos liefert. Die *ἀνθρῳποιγεσις*, die eine Weiterbildung der diairetischen Methode bedeutet, mußte dadurch sachlich die duale diairetische Entwicklung verdrängen. Als weitere Konsequenz schließt sich die Euklidische Klassifikation der Irrationalitäten an. Methodisch verwandt ist auch

die platonische Forderung, die astronomischen Phänomene zu „retten“ mittels gleichförmiger und geordneter Bewegungen und wahrscheinlich auch die Beschränkung der elementar-geometrischen Konstruktionen auf das Schlagen von Kreisen und das Ziehen von Geraden. Diese Beschränkung darf aber nicht als „Konstruktivismus“ im Sinne einer Existenzsicherung mathematischer Gebilde durch ihre „Erzeugung“ interpretiert werden. Im letzten Abschnitt wird die aufgestellte These an der Hand der Texte geprüft. Zum Schlusse wird der terminologische Vorschlag gemacht, statt „Idealzahl“ lieber „Ideenzahl“ zu sagen.

Dijksterhuis (Oisterwijk).

Bessel-Hagen, E., und O. Spies: Das Buch über die Ausmessung der Kreisinge des Ahmad ibn 'Omar al Karābīsī. Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math. B 1, 502—540 (1931).

Das hier erstmalig herausgegebene „Buch der Ausmessung der Kreisinge“ ist die einzige uns erhaltene Schrift von Karābīsī, eines angesehenen arabischen Mathematikers, dessen Lebenszeit vor das Ende des 10. Jahrhunderts nach Christus zu setzen ist. Die Verf. legen ihrer Textedition (S. 505—510) die ältere Oxforder Handschrift (16. Jhrh.) zugrunde unter genauer Angabe der Abweichungen in der anderen, Kairoer Handschrift (1735 n. Chr.) Den Schluß der Arbeit (S. 510—520) bilden sprachliche und mathematische Erläuterungen. Dabei werden die Fachwörter für die Proportionen, für Durchmesser, Inhalt, multiplizieren u. a. gegeben. Die für Vorder- und Hinterglieder wären vielleicht noch zu ergänzen. Das in I 1 und 2 vorkommende „miqdār“ wird mit μέγεθος in Zusammenhang gebracht. Doch bleibt die Frage offen, ob diese „Größen“, die im Gegensatz zu der griechischen Mathematik multipliziert werden können, Maßzahlen oder Strecken bedeuten sollen. Ebenso wenig läßt sich entscheiden, ob das Multiplizieren numerisch oder geometrisch zu denken ist. Inhaltlich zerfällt das Buch in 2 Abhandlungen, deren erste von den ebenen Kreisingen handelt und sich, was Form (Verwendung der Proportionen) und streng logischen Aufbau anlangt, eng an Euklid anlehnt. Nach 2 einleitenden Proportionssätzen (I 1 und 2) folgen 3 Lehrsätze (I 3—5) über Kreisinge und 13 Konstruktionsaufgaben über Kreise und Kreisinge, zu deren Begründung die vorhergehenden Sätze (außer I 9, 10, 13) verwendet werden. Die Verf. machen ihre mathematischen Erklärungen besonders dadurch wertvoll, daß sie alle zur Begründung notwendigen Sätze hauptsächlich auch aus Euklid genau angeben, wodurch sich die innere Einheitlichkeit dieser 1. Abhandlung klar ergibt. — Im Gegensatz hierzu steht die 2. Abhandlung, die sich in 7 Sätzen mit körperlichen „Kreisingen“ befaßt, also mit dem „torus“ mit quadratischem und kreisförmigem Querschnitt. Verf. heben hier unter Heranziehung von Vergleichsstellen aus Heron und Dionysodoros alle Unklarheiten des Textes sowie die Fehlschlüsse hervor, mit denen sich Karābīsī um die Exhaustion „herumschwindelt“, und äußern deshalb mit Recht starke Bedenken, ob dieser auch wirklich in den Geist von Euklid eingedrungen sei. — Ich möchte noch erwähnen, daß der den Verf. unklare Schlußatz von II 5 wohl so zu erklären ist, daß der Wulst mit dem Inhalt $\bar{J}_T = \frac{1}{2}(U_A + U_C) \cdot J_K$ als Zylinder mit der Höhe („Senkrechte“) $\frac{1}{2}(U_A + U_C)$ aufgefaßt werden kann, die wegen der „Kreisförmigkeit des Körpers gerundet ist“.

Vogel (München).

Sengupta, P. C.: History of the infinitesimal calculus in ancient and mediaeval India. Jber. dtsh. Math. Ver.igg 40, 223—227 (1931).

Die Arbeit lenkt erneut die Aufmerksamkeit auf diejenigen Stellen in Bhāskaras Siddhānta-Siromani, in denen schon 1858 Bāpu Deva Śāstrin Anklänge an die Infinitesimalrechnung gesehen hat. Es werden betr. „Differentiation“ drei Beispiele im Original und der Übersetzung beigebracht, während zur „Integration“ nur kurz auf die Oberflächen- und Volumbestimmung der Kugel bei Bhāskara Bezug genommen wird. Es wäre nützlich gewesen, wenn der Verf. aus Bhāskaras eigenem Kommentar dessen Beweisführungen ebenfalls vorgelegt hätte, anstatt hier z. B. einfach festzustellen: „In the proof . . . Bhāskara could not avoid the question of limits“; oder: „He . . . finally proves that the surface of the surface is . . .“ Dann wäre der Verf. vielleicht doch etwas bedenkllicher bezüglich seiner Feststellung geworden, „how far the Infinitesimal

Calculus was known to Bhâskara“, und hätte den Titel der Arbeit vorsichtiger gefaßt. Bei Bhâskara kommen nur Ansätze vor, infinitesimale Vorstellungen durch „Interpolation“ und „Summation“ beim Sinus eines Winkels einer approximativen numerischen Rechnung zu unterwerfen, die an sich interessant genug sind, es aber nicht rechtfertigen, bei Bhâskara eine (auf den Limesbegriff) gestützte Einsicht in das Prinzip der Infinitesimalrechnung zu sehen oder gar ihm die Bekanntschaft mit einem (gegenüber dem gewöhnlichen) neuen Kalkül zuzuschreiben, zu dessen Ausbildung Bhâskara die methodischen Mittel fehlten, und dessen Plan ihm (bei seinem einzigen Sinusbeispiel) auch gar nicht einfallen konnte. C. Müller (Hannover).

Datta, Bibhutibhusan: On the origin of the Hindu terms for “root”. Amer. math. Monthly 38, 371—376 (1931).

Weitere Ausführungen über die Geschichte und Grundbedeutung der Termini *mûla*, *pada* usw. Es wird gegen die Ansicht von Gandz [Amer. math. Monthly 35 (1928)] von arabischer Beeinflussung polemisiert und vor allem jede Verwandtschaft mit dem analogen ägyptischen Terminus bestritten. O. Neugebauer (Göttingen).

● **Newton, Isaac:** Optics or a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light. London: G. Bell & Sons, Ltd. 1931. XXX, 414 S. 6/—.

Algebra und Zahlentheorie.

Paolantonio, Raffaele: Alcune relazioni fra i coefficienti binomiali e nuove dimostrazioni che ne discendono per due teoremi aritmetici. Boll. Un. mat. ital. 10, 205—209 (1931).

Tricomi, Francesco: Una formula per calcolo dei grandi coefficienti binomiali. Boll. Un. mat. ital. 10, 215—217 (1931).

Claudian, Virgil: Gleichungssysteme und algebraische Identitäten. Rev. mat. Timişoara 11, 4—6 u. 13—15 (1931) [Rumänisch].

Takahashi, Shin-ichi: Über die Lage der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Tôhoku math. J. 34, 257—259 (1931).

Verf. beweist den folgenden Satz: Ist $f(x) = 0$ eine algebraische Gleichung n ten Grades mit reellen oder komplexen Koeffizienten und besitzt sie lauter verschiedene Wurzeln, die in einem Kreise T vom Radius R liegen, so muß der Radius jedes Kreises, der ganz in T enthalten ist und stets mindestens eine Wurzel von $f(x)$ enthält, größer als $\frac{R}{n^2} (\sqrt{4n+1} - 1)$ sein. Zum Beweis dieses Satzes konstruiert der Verf. eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, der $y = f(x)$ genügt, und wendet hierauf den bekannten Fiteschen Satz über die Nullstellen von Lösungen linearer Differentialgleichungen an. Als Anwendung zeigt der Verf., daß die Distanz zwischen den Nullstellen des n ten Legendreschen Polynoms nicht kleiner als $\frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - 1}{n(n+1)}$ ist. Wegner (Darmstadt).

Nagell, Trygve: Sätze über algebraische Ringe. Math. Z. 34, 179—182 (1931).

In J. f. Math. 164, 80—84 (1931) hatte Verf. auf Minkowskische Art gezeigt, daß es nur endlich viele aus ganzen algebraischen Zahlen bestehende Ringe von endlichem Grade mit gegebener Diskriminante gibt (vgl. dies. Zbl. 1, 118). In der vorliegenden Arbeit beweist er elementar denselben Satz für die Unterringe der Hauptordnung eines gegebenen endlichen algebraischen Zahlkörpers vom Grade n . Das wichtigste Hilfsmittel ist die Tatsache, daß alle Ringe dieser Art von gleicher Diskriminante, soweit sie überhaupt Zahlen n -ten Grades enthalten, eine solche Zahl gemein haben. Hat die Diskriminante eines solchen Ringes R nämlich den Wert $A^2\Delta$, wo Δ eine natürliche Zahl, Δ die Grundzahl des Körpers ist, so enthält R das Δ -fache jeder ganzen Körperzahl. Ausrechnung einer Basis von R mittels einer beliebigen in R enthaltenen Zahl ξ

vom Grade n zeigt, daß ξ nur in endlich vielen Unterringen der Hauptordnung vorkommen kann. W. Weber (Göttingen).

Nagell, Trygve: Zur algebraischen Zahlentheorie. Math. Z. **34**, 183—193 (1931).

Der algebraische Zahlkörper $\mathbb{K} = P(\xi)$ sei gegeben durch das primitive Element ξ , das Nullstelle des bekannten irreduziblen Polynoms $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ sei, dessen Nullstellen sich mit beliebiger Genauigkeit numerisch berechnen lassen sollen. Zunächst wird eine naheliegende Methode angegeben, für die Hauptordnung \mathfrak{o} von \mathbb{K} eine linear unabhängige Modulbasis in bezug auf den Ring \mathfrak{r} der ganzen rationalen Zahlen aufzustellen. Es folgt ein Verfahren, das zu entscheiden gestattet, ob eine beliebige algebraische Zahl β zu \mathbb{K} gehört, sowie der Bestimmung der zu \mathbb{K} gehörigen Einheitswurzeln und eines Systems von $r = r_1 + r_2 - 1$ unabhängigen Einheiten; dies letzte Verfahren, auf dem die wesentlichen weiteren Methoden beruhen, scheint freilich wenig befriedigend. Darauf gestützt kann man ein System von Fundamenteinheiten aufstellen. Methoden zur Bestimmung einer \mathfrak{r} -Modulbasis eines Ideals und zur Aufstellung der Ideale und Zahlen mit gegebener Norm schließen an. Ein Verfahren, die Äquivalenz zweier Ideale zu entscheiden, führt zur wirklichen Aufstellung der Idealklassen. Zuletzt wird noch die Zerfällung einer rationalen Primzahl in ihre Primideale behandelt. Grell (Jena).

Levitzki, Jakob: Über nilpotente Unterringe. Math. Annalen **105**, 620—627 (1931).

Ein Nilring ist ein nur aus nilpotenten Elementen bestehender Ring. Ein Ring \mathfrak{n} heißt nilpotent, wenn $\mathfrak{n}^r = 0$ für ein $r > 0$. Verf. beweist nun in Verallgemeinerung einer Vermutung des Ref. den Satz: Ist \mathfrak{o} ein Ring mit einer Kompositionsreihe von n Rechtsidealen (einschließlich dem Nullideal), so ist jeder Nilring in \mathfrak{o} nilpotent und n ist eine gemeinsame Schranke für die Exponenten aller nilpotenten Unterringe. Zum Schluß bringt Verf. einen neuen einfachen Beweis dafür, daß jeder nilpotente Unterring eines vollständig reduziblen Ringes in einem maximalen nilpotenten liegt, und daß alle maximalen konjugiert sind. Köthe (Münster).

Underwood, R. S.: On universal quadratic null forms in five variables. Trans. amer. math. Soc. **33**, 742—758 (1931).

Eine quadratische Form heißt „universal“, wenn sie alle ganzen Zahlen darstellt, und „Nullform“, wenn sie Null ist, auch wenn nicht alle Variablen Null sind. Dickson berechnet in seiner Arbeit („Universal quadratic forms“, Transactions **31**) alle universalen quadratischen Nullformen mit n Variablen für $n \leq 4$. In der vorliegenden Arbeit wird der Fall $n = 5$ behandelt. Dickson hat bewiesen: Jede universale quadratische Nullform in 3 oder mehr Variablen ist einer Form

$$F = 2^e g a x y + g b y^2 + c y z + g d \psi(z, w, \dots) \quad e \geq 0 \quad (1)$$

äquivalent, in der g und a ungerade, $(a, d) = 1$, $(c, g) = 1$, und der gr. g. Teiler der Koeffizienten von ψ gleich 1 ist. Der Verf. betrachtet den Fall, daß

$$\psi = \alpha(hz^2 + jzw + lw^2) + Azv + Bwv + Cv^2,$$

wobei $(\alpha, A, B, C) = 1$, $(h, j, l) = 1$, $(h, ga) = 1$, und leitet mehrere Sätze über die Lösbarkeit der Kongruenz $F \equiv G \pmod{gay}$, insbesondere $F \equiv G(ty)$ und $F \equiv G(p^n)$, und der Kongruenz $F \equiv G \pmod{2^n}$ ab. Der Verf. zeigt ferner, wann F universal ist, wenn $e = 0$. Hofreiter (Wien).

Massoutié, L.: Sur le dernier théorème de Fermat. C. r. Acad. Sci. Paris **193**, 502—504 (1931).

„Ist p eine Primzahl der Form $6n - 1$, so ist notwendig eine der Unbestimmten der Gleichung $x^p + y^p + z^p = 0$ durch 3 teilbar.“ Der Beweis gebraucht ausschließlich Hilfsmittel der elementaren rationalen Zahlentheorie. Bessel-Hagen (Bonn).

Pomey, Léon: Nouvelles remarques relatives au dernier théorème de Fermat. C. r. Acad. Sci. Paris **193**, 563—564 (1931).

Anderer und kürzerer Beweis des Satzes von Massoutié (vgl. vorst. Referat).

Bessel-Hagen (Bonn).

Oppenheim, A.: A class of arithmetical identities. Quart. J. Math., Oxford ser. 2, 230—233 (1931).

Es seien μ und ν zwei reelle Zahlen (nicht notwendig ganz), ferner $F(X, Y, Z)$ und $\varphi(X, Y, Z)$ Funktionen von X, Y, Z , für die $F(X, Y, Z) + F(X, -Y, -Z) + F(-X, Y, Z) + F(-X, -Y, -Z) = 0$, $\varphi(X, -Y, -Z) = \varphi(X, Y, Z)$, $\varphi(-X, Y, Z) = \varphi(X, Y, Z)$ ist. Ferner sei $S = \sum F(y + z, z - y, x)$, die Summe erstreckt über die ganzen Zahlen x, y, z , für die $\varphi(y + z, z - y, x) = n$, $y > 0, z > 0, \nu x + \mu y - \mu z \neq 0$ ist, und $S' = \sum [F(\xi, \eta, \zeta) + F(\xi, -\eta, -\zeta)]$, die Summe erstreckt über die ganzen Zahlen ξ, η, ζ , für die $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = n$, $\xi \equiv \eta \pmod{2}$, $\xi > \eta$, $\mu\eta > \nu\zeta$, $\xi + \eta \neq 0$. Dann ist $S = S'$. n ist dabei eine beliebige Zahl. *Schrutka.*

Csorba, Georg: Die diophantische Gleichung und die unbestimmte Kongruenz. Math. Annalen 105, 602—619 (1931).

Verf. bestimmt in elementarer Weise die Anzahl $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n; A)$ der Auflösungen in ganzen $x_i \geq 0$ der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = A \quad (a_i, A \text{ ganz}, (a_1, a_2, \dots, a_n) = 1). \quad (1)$$

Es sei λ ein beliebiges gemeinsames Vielfaches von (a_1, a_2, \dots, a_n) ; setzt man in (1):

$x_i = \xi_i + \frac{\lambda}{a_i} y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$, so findet man leicht

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n; A) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\xi_i \equiv A \pmod{\lambda} \\ 0 \leq \xi_i < \lambda/a_i}} \xi_i \left(\frac{A - \sum a_i \xi_i}{\lambda} + n - 1 \right). \quad (2)$$

Durchführung des binomischen Symbols und Betrachtungen über die unbestimmte Kongruenz im rechten Gliede von (2) geben nach vielen Umformungen

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n; A) = \sum_{z=0}^{n-1} C_z(A) \cdot A^z, \quad (3)$$

wo in bezug auf A die $C_z(A)$ periodische zahlentheoretische Funktionen sind, welche dargestellt sind in der Form von mehrfachen Summationen. [In Math. Ann. 75 (1914), 545 hatte Verf. (3) auf nichtelementarem Weg schon bewiesen.] Sehr wichtig für eine bedeutend einfachere Darstellung dieser mehrfachen Summationen ist weiter die Einführung einer Normalform für in $C_z(A)$ auftretende periodische zahlentheoretische Funktionen und die Methode, diese Normalform wirklich darzustellen. Verf. zeigt die Tragweite seiner Methode an vielen numerischen Beispielen.

NB. Ref. empfiehlt dem Leser, auf S. 605, Z. 14 von oben die Worte „obenerwähnten Regel“ zu ersetzen durch: „in der Bemerkung von S. 610ff. erwähnten und dort bewiesenen Regel“.

J. F. Koksma (Hilversum).

Archibald, R. G.: Criteria for the solution of a certain quadratic diophantine equation. Bull. amer. math. Soc. 37, 608—614 (1931).

Es seien a, b, c, d ganze Zahlen und $abcd \neq 0$; x, y, z, u Unbekannte. Es sollen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit der diophantischen Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = 0 \quad (1)$$

angegeben werden. Diese Aufgabe ist schon mehrfach behandelt worden, zuletzt von Mordell (dies Zbl. 1, 120), dessen Arbeit der Verf. einer ausführlichen Kritik unterzieht. Ohne B. d. A. kann angenommen werden, daß weder a noch b, c oder d einen quadratischen Faktor enthalten und daß nicht 3 der Koeffizienten a, b, c, d einen gemeinsamen Teiler haben. Unter diesen Annahmen leitet der Verf. die folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung (1) ab: I. a, b, c, d haben nicht alle dasselbe Vorzeichen. II. 1) $-(a, c)(a, d)(b, c)(b, d)\gamma\delta$ ist quadratischer Rest jeder ungeraden Primzahl p , die in (a, b) oder in (c, d) enthalten ist, wobei $(\alpha\beta\gamma\delta/p) = +1$ (Legendresches Restsymbol). 2) $-(a, b)(a, d)(b, c)(c, d)\beta\delta$

ist quadratischer Rest jeder ungeraden Primzahl p , die in (a, c) oder in (b, d) aufgeht und wobei $(\alpha\beta\gamma\delta/p) = +1$. 3) $(a, b)(a, c)(b, d)(c, d)\beta\gamma$ ist quadratischer Rest jeder ungeraden Primzahl p , die in (a, d) oder in (b, c) enthalten ist, wobei $(\alpha\beta\gamma\delta/p) = 1$. III. Entweder ist 1. $abcd \equiv 2, 3, 5, 6, 7 \pmod{8}$ oder 2. $abcd \equiv 1$ und $a + b + c + d \equiv 0 \pmod{8}$ oder 3. $abcd \equiv 4 \pmod{8}$ und, wenn a und b gerade, c und d ungerade, dann ist entweder $abcd/4 \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}$ oder $abcd/4 \equiv 1 \pmod{8}$ und $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + c + d \equiv \frac{(cd)^2 - 1}{2} \pmod{8}$. Hofreiter (Wien).

Corput, J. G. van der, und J. Popken: Über den kleinsten Wert einiger quadratischer Formen. II. Proc. roy. Acad. Amsterd. **34**, 767—781 (1931).

Ähnlich wie in der ersten Mitteilung (vgl. dies. Zbl. **2**, 129) werden hier scharfe Abschätzungen für einige quadratische Formen $\sum_{r,s=1}^m e_{rs} u_r u_s$ (e_{rs} , u_r reell) bewiesen; z. B.: für nicht ganzes $\alpha < \frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{r,s=1}^m \Gamma(\alpha + r - s) \Gamma(\alpha - r + s) u_r u_s \geq (-1)^{m-1} (m-1)! \Gamma^2(\alpha + 1 - m) u_m^2 \prod_{r=1}^{m-1} (2\alpha - r);$$

ähnliche Resultate für die Formen $\sum_{r,s=1}^m \frac{\Gamma(\alpha + r + s)}{\Gamma(\beta + r + s)} u_r u_s$ für $\beta > \alpha > -2$;

$$\sum_{r,s=1}^m \frac{\Gamma(\alpha - r - s)}{\Gamma(\beta - r - s)} u_r u_s \text{ für } \beta > \alpha > 2m; \quad \sum_{r,s=1}^m \frac{u_r u_s}{\Gamma(\alpha + r + s) \Gamma(\beta - r - s)} \text{ für } \beta < 2,$$

$$\alpha + \beta > 1, \beta \text{ nicht ganz; } \sum_{r,s=1}^m \frac{u_r u_s}{\Gamma(\alpha + r - s) \Gamma(\beta - r + s)} \text{ für nicht ganzes } \alpha > \frac{1}{2}.$$

Folgerungen: 1. ähnliche Abschätzungen für Formen, deren Koeffizienten aus Binomialkoeffizienten gebildet sind; 2. Abschätzungen für gewisse bestimmte Integrale,

$$\text{z. B. für } \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \left(\sum_{r=1}^m u_r x^{r-1} \right)^2 dx \quad (\alpha > 0). \quad \text{Jarník.}$$

Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the Zeta-function of Riemann. Quart. J. Math., Oxford ser. **2**, 161—173 (1931).

k sei eine beliebige natürliche Zahl; $K = 2^{k-1}$; $P(x)$ das Restglied beim Kreisproblem; $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ die Riemannsche Zetafunktion. In den O -Gliedern mögen numerische oder höchstens von k abhängige Konstanten auftreten. Es gibt 4 Verfahren, die einen Restexponenten $< \frac{1}{3}$ bei der Abschätzung von $P(x)$ liefern, und zwar: I—II (van der Corput 1922—1923), III (Hardy-Littlewood-Landau 1923), IV (van der Corput 1928). Sie ergeben für $P(x)$ und $\zeta(\sigma + it)$: a) $O\left(x^{\frac{163}{494}}\right)$ und $O\left(t^{\frac{163}{988}}\right)$ für $\sigma = \frac{1}{2}$; b) $O(x^\theta)$ mit einer geeigneten numerischen Konstanten $\theta < \frac{1}{3}$ und nichts für $\zeta(s)$;

$$\text{c) } O\left(x^{\frac{37}{112}} \log^{\frac{5}{56}} x\right) \text{ und } O\left(t^{\frac{1}{(k+1)K}} \log^{1+\frac{1}{K}} t\right) \text{ für } \sigma = 1 - \frac{1}{K}, \quad k \geq 2;$$

$$\text{d) } O\left(x^{\frac{27}{82}}\right) \text{ und } O\left(t^{\frac{1}{4K-2}} \log t\right) \text{ für } \sigma = \frac{k+1}{4K-2}, \quad k \geq 2.$$

I und II sind überaus langwierig und unübersichtlich; IV etwas klarer im Aufbau, immerhin aber noch erheblich kompliziert. Weitaus am einfachsten ist III; man nimmt dafür gern in Kauf, daß bei den Anwendungen noch ziemlich umfangreiche Rechnungen zu erledigen sind. In der vorliegenden Abhandlung entwickelt Titchmarsh, unter Zuhilfenahme einiger Ideen von IV, eine neue Methode (V) gleicher Tragweite. Als Beispiele werden die Abschätzungen d) gegeben. Der Hauptsatz von V lautet: „Es sei im Intervall (a, b) die reelle Funktion $f(x)$ $k+1$ mal stetig differenzierbar und daselbst $f^{(k+1)}(x) \geq r_k (> 0)$ oder $\leq -r_k$; R_k werde durch

$$|f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)| = |b - a| R_k$$

definiert. Dann gilt mit geeignetem positivem $\alpha_k < 1$

$$\sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = O\left((b-a) R_k^{\frac{1}{2K-1}} r_k^{-\frac{1}{4K-2}}\right) + O\left((b-a)^{1-\frac{1}{K}} R_k^{\alpha_k} r_k^{-\alpha_k - \frac{1}{4K-2}}\right). \quad (1)$$

Zum Vergleich sei angeführt, daß IV unter den gleichen Voraussetzungen

$$\sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = O\left((b-a) R_k^{\frac{1}{2K-1}} r_k^{-\frac{1}{4K-2}}\right) + O\left((b-a)^{1-\frac{k+1}{2K}} r_k^{-\frac{1}{2K}}\right) \\ + O\left((b-a)^{1-\frac{1}{2K}} R_k^{\frac{1}{2K}} r_k^{-\frac{1}{2K}}\right)$$

liefert. Die Titchmarshsche Abhandlung ist in zweifacher Hinsicht überraschend: 1. Beim Übergang von IV zu V sind so ziemlich alle Schwierigkeiten verschwunden, der Beweis von (1) erfordert überdies mit allen Vorbereitungen nur $5\frac{1}{2}$ S.! 2. V ist sogar erheblich einfacher als III — man stelle die mit V geführten Beweise von d) den mit III geführten Beweisen von c) in

Landaus „Vorlesungen über Zahlentheorie“ gegenüber (hier bei $P(x)$ nur x^5 statt $\log^{\frac{5}{56}} x$).
3 Druckfehler: S. 171, Zeile 7 von unten: lies $f^{(5)}(\nu)$ statt $f^{(4)}(\nu)$; S. 173, Zeile 4: lies $-\frac{1-2\alpha}{2K}$ statt $-\frac{1-2\alpha}{K}$; S. 173, Zeile 11: lies $26\frac{1}{4}/82$ statt $24\frac{1}{2}/82$. A. Walfisz (Radość).

Mordell, L. J.: On Hecke's modular functions, zeta functions, and some other analytic functions in the theory of numbers. Proc. Lond. math. Soc., II. s. 32, 501 bis 556 (1931).

Verf. gibt eine kurze Zusammenstellung Heckscher Arbeiten über analytische Zahlentheorie und Modulfunktionen. Es handelt sich in erster Linie um die Anwendung der Poissonschen Formel, mit deren Hilfe folgende Resultate gewonnen werden: 1. Eine Art Lipschitzscher Formel in algebraischen Zahlkörpern, 2. die Transformationsformeln der Heckschen Thetafunktionen, die zu einem algebraischen Zahlkörper gehören, 3. Fortsetzung und Funktionalgleichung einer gewissen sehr allgemeinen Klasse von Zetafunktionen, dies mit einem Siegelschen Ansatz und ohne Benutzung der Thetafunktionen, 4. die Formeln, welche das Verhalten der von Hecke eingeführten binären Thetareihen bei Modulusubstitutionen angeben. Hierunter fallen insbesondere die mit indefiniten quadratischen Formen gebildeten Thetafunktionen (E. Hecke, Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Ann. 97, 1926). Petersson.

Hasse, Helmut: Zum Hauptidealsatz der komplexen Multiplikation. Mh. f. Math. 38, 315—322 (1931).

In dieser und in den beiden nachfolgend besprochenen Arbeiten verfolgt der Verf. das Ziel weiter, das er sich in der in dies. Zbl. 2, 120 referierten Arbeit: Neue Begründung der kompl. Mult. II gesteckt hat: die Eigenschaften der Klassenkörper imaginärquadratischer Grundkörper allein auf die kompl. Mult. der elliptischen Funktionen zu gründen, ohne von den der allgemeinen Klassenkörpertheorie eigentümlichen transzendenten Methoden (L -Reihen) Gebrauch zu machen. Ist \mathfrak{m} ein ganzes Ideal des imaginären quadratischen Körpers Ω , das zur Diskriminante d von Ω prim ist, und nur Primfaktoren ersten Grades enthält, und \mathfrak{a} ein beliebiges Ideal von Ω , so gilt für \mathfrak{m}^{12} die folgende Darstellung als Hauptideal im absoluten Klassenkörper K von Ω :

$$\mathfrak{m}^{12} = \left(\frac{\Delta\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}\right)}{\Delta(\mathfrak{a})} \right),$$

wenn

$$\Delta(w_1, w_2) = \left(\frac{2\pi}{w_2} \right)^{12} e^{2\pi i \frac{w_1}{w_2}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i \frac{w_1}{w_2} k} \right)^{24}$$

ist und $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}$ bzw. \mathfrak{a} für eine Basis von $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}$ bzw. \mathfrak{a} steht. [Siehe H. Hasse, Neue Begründung d. kompl. Mult. I J. f. Math. 157 (1927)]. Danach ist

$$\mathfrak{m} = \left(\frac{\Delta_{12}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}\right)}{\Delta_{12}(\mathfrak{a})} \right),$$

wo

$$\Delta_{12}(w_1, w_2) = \left(\frac{2\pi}{w_2} \right)^{\frac{\pi i w_1}{6 w_2}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i \frac{w_1}{w_2} k} \right)^2.$$

Die Zahl $\frac{A_{12}\left(\frac{a}{m}\right)}{A_{12}(a)}$ ist aber nicht unabhängig von der für $\frac{a}{m}$ bzw. a eingesetzten Idealbasis, und braucht daher nicht in K zu liegen. Ist $N(m) = m \equiv 1 \pmod{12}$, und wählt man für a irgendeine Basis α_1, α_2 , dann aber für $\frac{a}{m}$ die Basis $m^{-1}M(\alpha_1, \alpha_2)$, wo M eine Matrix ist, welche α_1, α_2 in eine Basis von $\frac{ma}{m}$ transformiert und mod 12

der Einheitsmatrix kongruent ist, so erhält man eine Zahl $\frac{A_{12}\left(\frac{a}{m}\right)}{A_{12}(a)}$, die in K liegt. Da man ohne transzendente Mittel leicht nachweisen kann, daß es in jeder absoluten Idealklasse von Ω zu d prime ganze Ideale m mit $N(m) \equiv 1 \pmod{12}$ gibt, so folgt daraus der Hauptidealsatz.

Max Deuring (Leipzig).

Hasse, Helmut: Ein Satz über die Ringklassenkörper der komplexen Multiplikation. Mh. f. Math. 38, 323–330 (1931).

Ein mit den Mitteln der komplexen Multiplikation, ohne transzendente Methoden (L -Reihen) geführter Beweis des folgenden Satzes: Ω ein imaginärer quadratischer Zahlkörper, K_m der Ringklassenkörper mod m von Ω . Ist $m' \equiv 0 \pmod{m}$, so ist $K_m \leq K_{m'}$ und K_m gehört zu der Untergruppe der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}_{m'}$ von $K_{m'}/\Omega$, deren Elemente durch das Artinsche Reziprozitätsgesetz den Ringklassen aus der Hauptringklasse mod m zugeordnet sind. Sei p eine Primzahl. Zum Beweis von $K_m \leq K_{mp}$ wird gezeigt, daß die Ringklassengleichung $H_m(t)$ mod m genau eine Wurzel mit dem Polynom $\prod_{v=1}^{p+1} (t - j(P_v, P(\alpha_1, \alpha_2)))$ gemeinsam hat, wo P_1, \dots, P_{p+1} ein volles Re-

präsentantensystem der Transformationsklassen p -ten Grades, α_1, α_2 die Basis eines zu mp primen Ideals a von Ω in Beziehung auf den Ring Ω_m mod. m von Ω und P eine Transformation p -ten Grades, die α_1, α_2 in eine Basis von a in Beziehung auf Ω_{mp} transformiert, bedeuten. Die genauere Aussage über die zu K_m gehörige Untergruppe von $\mathfrak{G}_{m'}$ folgt dann in üblicher Weise unter Heranziehung des Weberschen Satzes über die Invarianz des g. g. T. zweier Polynome mit variablen Koeffizienten. Weiter wird der folgende Satz bewiesen: Wenn die Diskriminante d von $\Omega \neq -3$ und $\neq -4$ ist, so ist für teilerfremde m_1 und m_2 $K_{m_1 m_2} = K_{m_1} K_{m_2}$; bei $d = -4$ gilt für $(m_1, m_2) = 1$ $K_{2m_1 m_2} = K_{2m_1} K_{2m_2}$ und bei $d = -3$ gilt für $(m_1, m_2) = 1$ $K_{3m_1 m_2} = K_{3m_1} K_{3m_2}$.

Max Deuring (Leipzig).

Hasse, Helmut: Das Zerlegungsgesetz für die Teiler des Moduls in den Ringklassenkörpern der komplexen Multiplikation. Mh. f. Math. 38, 331–344 (1931).

Aufstellung des Zerlegungsgesetzes für die Primteiler des Moduls m des Ringklassenkörpers K_m über einem imaginären quadratischen Körper Ω ohne transzendente Methoden. Nach dem im vorstehenden Referat zuletzt erwähnten Satz genügt es, diese Aufstellung für den Fall durchzuführen, daß $m = p^n e$ ist, p Primzahl, $2e$ die Anzahl der Einheitswurzeln in Ω . Die Überlegungen sind in gewisser Weise analog zu denen, die zum Zerlegungsgesetz von p im Kreiskörper $P\left(e^{\frac{2\pi i}{p^n}}\right)$ führen und die an die Formeln

$$\prod_{v=1}^{p-1} \left(1 - e^{\frac{2\pi i v}{p}}\right) = p, \quad \prod_{v=0}^{p-1} \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{p^{n+1}}(1+v p^n)}\right) = 1 - e^{\frac{2\pi i}{p^n}}$$

anschließen. Entsprechend den Zahlen $1 - e^{\frac{2\pi i v}{p}}$ und $1 - e^{\frac{2\pi i}{p^{n+1}}(1+v p^n)}$, die im Falle der Kreiskörper Hauptidealdarstellungen für die gesuchten Primteiler von p liefern, werden singuläre Werte der Funktionen

$$\psi_{P_v}(w_1, w_2) = \frac{A_{12}\left(\frac{1}{p} P_v(w_1, w_2)\right)}{A_{12}(w_1, w_2)}$$

benutzt (die Bedeutung von Δ_{12} und P , siehe im obenstehenden Referat) für die ähnliche Formeln wie oben die $1 - e^{\frac{2\pi i v}{p}}$, $1 - e^{\frac{2\pi i}{p^{n+1}}(1 + vp^n)}$ gelten, und die HauptidealDarstellungen der fraglichen Primideale sind. Die Betrachtungen führen aber nicht für alle in Frage kommenden Primideale von Ω zum Ziel. Verf. kündigt jedoch an, daß ihm gerade für diese Ausnahmefälle der Beweis des Zerlegungsgesetzes für die durch die Webersche τ -Funktion definierten Strahlklassenkörper gelungen sei, so daß man zusammen eine vollständige Theorie der Diskriminantenteiler für die Klassenkörper der komplexen Multiplikation hat. Damit ist ein Desideratum erfüllt, das vom Verf. in der Arbeit Neue Begr. d. kompl. Mult. II gestellt wurde. *Deuring.*

Analysis.

Germa, R. H. J.: Sur une propriété d'intégrales multiples élémentaires. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 6, 151—157 u. Bol. Semin. mat. argent. Nr 8, 1—8 (1931).

Zur Auswertung von Integralen der Form

$$\int_0^y dv \int_0^z Q(v, w) \cdot e^{bv + cw} \frac{\sin}{\cos} (\beta v + \gamma w) dw,$$

wo $Q(v, w)$ eine ganze rationale Funktion ist, werden Rekursionsformeln angegeben.

R. Schmidt (Kiel).

Cavallaro, Vincenzo G.: Sull'approssimata determinazione dei centri di gravità di elementi circolari mediante divisione aurea. Boll. Un. mat. ital. 10, 193—196 (1931).

Broggi, Ugo: Sulla funzione primitiva di una funzione razionale. Boll. Un. mat. ital. 10, 196—202 (1931).

Si dà una condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione primitiva di una funzione razionale sia razionale. E l'espressione di un ramo uniforme della funzione primitiva, indipendente dalla determinazione delle radici del denominatore della funzione razionale. *Autoreferat.*

Broggi, Ugo: Sulla somma d'una funzione razionale. Rend. Ist. lombardo Sci., II. s. 64, 290—294 (1931).

Let $\varphi(t) = \sum_0^\infty a_i t^i$ converge over the whole plane and $\int_0^\infty e^{-tx} \varphi(t) dt = \Phi(x)$ converge for $R(x + p) > \alpha$ (p positive integer or zero). We readily see that $\sum \Phi(x)$ "sum" of $\Phi(x)$ (in the sense of Nörlund) is given by

$$F(x) = -\Phi(x) - \Phi(x+1) - \dots - \Phi(x+p-1) + a_0 \Psi(x+p) + \int_0^\infty e^{-t(x+p)} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{e^{-t} - 1} dt \quad (*)$$

$$\left(\Psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx}; \text{ for } p = 0, F(x) \text{ reduces to } a_0 \Psi(x) + \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{e^{-t} - 1} dt \right).$$

The author observes—and this is the object of his Note—that in case of

$$\Phi(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{x^m + b_1 x^{m-1} + \dots}{x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots}$$

— rational fraction, with $n - m > 0$, — we can determine $\varphi(t)$, hence $\sum \Phi(x)$, without knowing the zeros of $Q(x)$ [analogon to Hermite's method of integrating rational fractions]. If the zeros of $Q(x)$ are known, we may compare (*) with another expression $F_1(x)$ for $\sum \Phi(x)$ which employs the derivatives of $\Psi(x)$ (Nörlund, Differenzenrechnung, p. 105), and prove that $F(x) - F_1(x) = \text{const.}$

J. Shohat (Philadelphia).

Reihen und Verwandtes:

Lehmer, D. N.: Inverse ternary continued fractions. Bull. amer. math. Soc. **37**, 565—569 (1931).

The author considers purely periodic ternary continued fractions $(p_1, q_1; \dots; p_n, q_n; \dots)$ associated with the "convergent sets" $\{A_i, B_i, C_i\}$ satisfying the following recurrence relation: $W_i = q_i W_{i-1} + p_i W_{i-2} + W_{i-3}$ (with initial values 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1 for A, B, C resp.) and the corresponding "characteristic cubic": $p^3 - M p^2 + N p - 1 = 0$, where $M = A_{n-2} + B_{n-1} + C_n$, $N = A_{n-2} B_{n-1} - A_{n-1} B_{n-2} + B_{n-1} C_n - B_n C_{n-1} + C_n A_{n-2} - A_n C_{n-2}$, and proves the following theorem. The characteristic cubic remains unchanged when the order of the "partial quotient pairs" $(p_1, q_1; \dots; p_n, q_n)$ is inverted, provided, $p_i = \alpha t + \beta$, $q_i = \gamma t + \delta$ ($i = 1, \dots, n$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ —any fixed integers, ≥ 0 , t takes any integral values). The proof is by mathematical induction, an interesting feature of which being that it has to be applied simultaneously to a group of assumed relations. A similar theorem can be proved for quaternary continued fraction. It holds, the author surmises, for fractions of higher order, this surmise awaiting a general proof. *J. Shohat* (Philadelphia).

Wall, H. S.: Convergence criteria for continued fractions. Bull. amer. math. Soc. **37**, 575—579 (1931).

Two criteria are given for the convergence of the continued fraction

$$F(a, z) = \frac{1}{|a_1 z} + \frac{1}{|a_2} + \frac{1}{|a_3 z} + \dots \quad (a_i \text{ real, } \neq 0)$$

supplementing those given by Stieltjes and Hamburger for the cases, resp., $a_i > 0$, $a_{2i+1} > 0$. The criteria are obtained: ^{1°} by transforming $F(a, z)$ into $F(b, z)$, the $a - s$ and the $b - s$ being related as follows:

$$a_{2i} = b_{2i+1} / \delta_i^{b-1} \delta_i^{b_i}, \quad a_{2i+1} = b_{2i+2} [\delta_i^b]^2, \quad 1) \quad (\delta_i^b = b_1 + b_3 + \dots + b_{2i+1});$$

^{2°} by transforming in a like manner $F(b, z)$ into $F(c, z)$, and expressing the convergents for $F(a, z)$ in terms of those for $F(b, z)$, $F(c, z)$. The author then uses the known behavior of the latter convergents, having imposed upon the $b - s$ and $c - s$ certain properly chosen conditions (for ex., $\sum |b_i|$ converges). *J. Shohat* (Philadelphia).

Moritz, R. E.: On the sums of depleted Fourier's series. Tôhoku math. J. **34**, 281—290 (1931).

Es handelt sich um die Bestimmung des Wertes der Reihen $\sum \frac{\cos mx}{m^2}$ und verwandter Reihen, wobei m alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, die zu n gegebenen Primzahlen teilerfremd sind. *O. Szász* (Frankfurt, Main).

Bernstein, Serge: Sur le maximum absolu d'une somme trigonométrique. C. r. Acad. Sci. Paris **193**, 433—436 (1931).

The following results are stated (without proof, but with a reference to the classical methods of the theory of best approximations): I. If $S_n(\theta)$ be a trigonometric polynomial of order $\leq n$, if $|S_n(0)| \leq 1$, $|S_n(\alpha)| \leq 1$, and it is known that the absolute maximum M of $|S_n(\theta)|$ is reached in $(0, \alpha)$, then $M \leq \left(\cos \frac{n\alpha}{2}\right)^{-1}$. II. If $|S_n(\theta_k)| \leq 1$ at $2\lambda n = 2Nn/(N-1)$ equidistant points θ_k , N being an integer, then, for all values of θ ,

$$|S_n(\theta)| \leq \frac{1}{N} \left[1/\sin \frac{\pi}{2N} + 1/\sin \frac{3\pi}{2N} + \dots + 1/\sin \frac{(2N-1)\pi}{2N} \right].$$

By means of trigonometric interpolation formulas of a certain type it is established that these results are the best possible. Conditions of uniform convergence of these interpolation formulas are given. *J. D. Tamarkin* (Providence).

¹ Cf. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Oeuvres, II, p. 544.

Berry, Andrew C.: Necessary and sufficient conditions in the theory of Fourier transforms. Ann. of Math., II. s. 32, 830—838 (1931).

Notwendige und hinreichende Bedingungen werden ermittelt, damit $F(x)$ die Fouriertransformierte einer Funktion $f(x)$ der Klasse L_p ist, $1 \leq p \leq 2$. Wenn $1 < p$ ist, lauten diese:

1. $F(x) \subset L_{p'}$;
2. $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) [e^{ixy} - 1] dy / iy$

ist unbestimmtes Integral einer Funktion $f(x)$ in L_p (Bedingung von F. Riesz). Es sei jetzt $p = 1$. L_{∞} sei die Klasse der meßbaren Funktionen $f(x)$, deren obere meßbare

Grenze $l_{\infty}(f)$ endlich ist. Es sei ferner $l_{\varrho}(f) = [(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |f|^{\varrho} dx]^{1/\varrho}$ für $1 \leq \varrho < \infty$. Die Bedingungen lauten dann:

1. $F(x) \subset L_{\infty}$;
2. $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) g(x) dx \right| \leq C_F l_{\infty}(G)$

für jedes $g(x)$ in L_1 , wo $G(x)$ die Fouriertransformierte von $g(x)$ ist und C_F nicht von $g(x)$ abhängt; 3. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon, F)$, so daß

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) g(x) dx \right| \leq \varepsilon l_{\infty}(G)$$

ist, sobald nur $G(x)$, die Fouriertransformierte von $g(x)$ ($\subset L_1$), der Bedingung $l_1(G) \leq \delta l_{\infty}(G)$ genügt. Man vergleiche die entsprechenden Bedingungen für Fourierkoeffizienten (für $p = 1$ bei R. Salem, vgl. dies. Zbl. 1, 15, für $1 < p < 2$ ist wohl nur die Notwendigkeit dieser Bedingungen durch den Young-Hausdorffschen Satz bekannt).

Hille (Princeton).

Wolf, F.: Contribution à la théorie des séries trigonométriques généralisées et des séries à fonctions orthogonales. Spisy přírod. Fak. Masaryk Univ. Brno Nr 130, 1 bis 34 (1931).

Eine Anzahl von Resultaten über allgemeine trigonometrische Reihen der Form $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$, wobei die Koeffizienten durch Anwendung der Operation

$$a_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M} \int_{-M}^M e^{i\lambda_n x} f(x) dx$$

auf eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(x)$ bestimmt sind, ergeben sich mehr oder weniger direkt aus dem folgenden Satze, dessen Aufstellung und Beweis das Hauptziel der Arbeit ist. Erfüllt eine trigonometrische Reihe $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ mit $\lambda_n \geq 1$ die folgenden (notwendigen und hinreichenden) Bedingungen: 1. Für alle x im Intervall $a < x < b$ gilt für den Ausdruck

$$M_m = \text{Max}_{m < \lambda \leq m+1} \sum_{m < |\lambda_n| \leq \lambda} a_n e^{i\lambda_n x}$$

die Relation $\lim_{m \rightarrow \infty} M_m = 0$. 2. Die zweimal integrierte Reihe $-\sum \frac{a_n}{\lambda_n^2} e^{i\lambda_n x}$ ist die Fouriersche Reihe einer fastperiodischen Funktion $F(x)$ derart, daß im Intervall a, b

$$F(x) = \int_a^x dy \int_a^y f(z) dz + Cx + D$$

gilt, so konvergiert der Ausdruck

$$D_m = \sum a_n e^{i\lambda_n x} - \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+2t) \frac{\sin 2mt}{t} dt$$

mit wachsendem m im Intervall $a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon$ gleichmäßig gegen Null. Der Beweis stützt sich auf die von Bochner angegebene Relation

$$S_\lambda = \sum \left(1 - \left| \frac{\lambda_n}{\lambda} \right| \right) a_n e^{i \lambda_n x} = \frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+2t) \frac{\sin^2 \lambda t}{\lambda t^2} dt,$$

woraus leicht folgt, daß das Konvergenzverhalten der Differenz D_m durch das bei beliebigem $l > 0$ über das Äußere des Intervalls $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$ erstreckte Integral

$$\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int F(x+2t) \frac{\sin(2m+l)t \sin lt}{l t^2} dt$$

charakterisiert wird. Von diesem Integral läßt sich sodann durch geeignete Wahl von l als Funktion von m zeigen, daß es mit $m \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Folgerungen aus diesem Theorem sind u. a. die folgenden Sätze, die — für gewöhnliche Fouriersche Reihen ausgesprochen — auf Riemann zurückgehen: Konvergiert die Reihe $\sum a_n e^{i \lambda_n x}$ für $x = x_0$ gegen den Wert A und ist in der Umgebung dieses Punktes die Bedingung 1 des obigen Satzes erfüllt, so gilt für die Funktion

$$F(x) = - \sum \frac{a_n}{\lambda_n^2} e^{i \lambda_n x},$$

die Relation

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta^2 F(x_0)/h^2 = A.$$

Ohne die Voraussetzung der Konvergenz für $x = x_0$ gilt noch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta^2 F(x_0)/h = 0.$$

Analoge Sätze werden auch für andere Orthogonalfunktionen formuliert, so z. B. für die Hermiteschen und Legendreschen Funktionen. *Lüneburg* (Göttingen).

Lösch, Friedrich: Über den Permanenzsatz gewisser Limitierungsverfahren für Doppelfolgen. *Math. Z.* 34, 281–290 (1931).

Soient deux suites

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} a_{00} \\ a_{10} \ a_{11} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m0} \ a_{m1} \dots a_{mm} \\ \dots \dots \dots \end{array} & \begin{array}{l} b_{00} \\ b_{10} \ b_{11} \\ \dots \dots \dots \\ b_{m0} \ b_{m1} \dots b_{mm} \\ \dots \dots \dots \end{array} \\ \text{A.} & \text{B.} \end{array}$$

telles que a) $a_{mp} \rightarrow 0$, $b_{mp} \rightarrow 0$ lorsque $m \rightarrow \infty$; b) $|a_{m0}| + |a_{m1}| + \dots + |a_{mm}| < K$, $|b_{m0}| + |b_{m1}| + \dots + |b_{mm}| < K$ quel que soit m ; c) $a_{m0} + a_{m1} + \dots + a_{mm} = A_m \rightarrow 1$, $b_{m0} + b_{m1} + \dots + b_{mm} = B_m \rightarrow 1$. $s_{\mu\nu}$ étant une suite double posons

$$S_{mn} = \sum_{\mu, \nu}^{m, n} a_{m\mu} b_{n\nu} s_{\mu\nu} \quad (m, n = 0, 1, 2 \dots).$$

L'auteur appelle $s_{\mu\nu}$ »convergente $\{AB\}$ « (» $\{AB\}$ limitierbar«) vers s si $\lim_{m, n = \infty} S_{mn} = s$.

Il dit que $s_{\mu\nu}$ appartient à la classe $K(AB)$ si la suite S_{mn} est bornée. L'auteur démontre les deux théorèmes suivants: I. Si $s_{\mu\nu}$ appartient à la classe $K(AB)$ et si $\lim_{\mu, \nu = \infty} s_{\mu\nu} = s$, alors elle est aussi »convergente $\{AB\}$ « vers s . II. Si les suites A et B

vérifient en plus de a), b) et c) la condition d) quels que soient p et P il existe au moins un système d'indices $\varrho_0 < \varrho_1 < \dots < \varrho_p$ et un système $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_p$ tels que $\varrho_0 > P$, $\sigma_0 > P$ et tels que les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{\varrho_0 0} & a_{\varrho_0 1} & \dots & a_{\varrho_0 p} \\ a_{\varrho_1 0} & a_{\varrho_1 1} & \dots & a_{\varrho_1 p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\varrho_p 0} & a_{\varrho_p 1} & \dots & a_{\varrho_p p} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} b_{\sigma_0 0} & b_{\sigma_0 1} & \dots & b_{\sigma_0 p} \\ b_{\sigma_1 0} & b_{\sigma_1 1} & \dots & b_{\sigma_1 p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\sigma_p 0} & b_{\sigma_p 1} & \dots & b_{\sigma_p p} \end{vmatrix}$$

sont différents de zéro, alors toute suite $s_{\mu\nu}$ convergente et »convergente $\{AB\}$ appartient à la classe $K(AB)$. D'ailleurs de $S_{mn} \rightarrow S$ et $s_{\mu\nu} \rightarrow s$ résulte que $S = s$ même si, seulement, a), b) et c) ont lieu (que ceci a lieu si a), b) c) et d) ont lieu résulte immédiatement de I et II.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand.)

Leja, F.: Sur une propriété des séries des polynomes. C. r. Acad. Sci. Paris 193, 506—509 (1931).

L'auteur appelle facteur de convergence uniforme de

$$\sum P_n(z) = \sum (a_0^{(n)} + a_1^{(n)}z + \dots + a_n^{(n)}z^n) \quad (1)$$

dans le domaine D la borne supérieure λ des quantités positives l telles que $\sum l^n P_n(z)$ converge uniformément dans D . En posant $M_n = \max |P_n(z)|$ (z dans D) on a $\lambda = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{M_n}}$. L'auteur énonce le théorème suivant: Si (1) converge sur un arc rectifiable

son λ dans chaque D borné est positif. Pour la démonstration l'auteur s'appuie sur les faits suivants: soit d le diamètre d'un arc C et soient A et B deux points de C dont la distance est d . — Quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe sur AB un ensemble E tel que mes. $(E + E') > d - \varepsilon$ et tel que sur E la suite $|P_0(z)|, |P_1(z)|, \dots$ est uniformément bornée. A chaque $\varepsilon' > \varepsilon$ et à chaque entier n correspond une suite z_0, z_1, \dots, z_n appartenant à E et telle que $|z_j - z_k| \geq (j - k) \frac{d - \varepsilon'}{n}$ ($j > k$) (lemmes 1 et 2).

Le lemme 3 donne les $a_i^{(n)}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) en fonction des $P_n(z_j)$ et z_k ($j, k = 0, 1, \dots, n$). Il résulte des lemmes 1, 2 et 3 que $|a_j^{(n)}| < M^n$, M ne dépendant que de l'arc précité. L'auteur ne donne pas la démonstration des lemmes. (1) peut converger dans un ensemble partout dense du plan sans qu'il existe un domaine où λ soit différent de zéro. L'auteur justifie cette remarque par un exemple. Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Sansone, G.: Sulla convergenza parziale degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali. Estensione del teorema di Kolmogoroff sugli sviluppi in serie di Fourier. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 842—847 (1931).

The following theorem is proved: Let $\{f_n(P)\}$ be an orthogonal set of functions for a domain A and $f(P) \in L_2$ over A . Let $\{a_n\}$ be the set of Fourier coefficients of $f(P)$ with respect to the set $\{f_n(P)\}$. Assume that the Fourier series $\sum a_n f_n(P) \sim f(P)$ is (C, r) summable to $f(P)$, almost everywhere in A ($r > 0$). Let $\{n_m\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) be a sequence of integers satisfying the condition $n_{m+1}/n_m > \lambda > 1$. Let s_n be the n -th partial sum of the Fourier series above. Then the sequence $\{s_{n_m}\}$ converges to $f(P)$ almost everywhere in A . This theorem is a generalization of an analogous theorem of Kolmogoroff [Fund. Mat., 5, 96—97 (1924)] for the trigonometric Fourier series and $r = 1$, the proof being a natural extension of that of Kolmogoroff. Applications to Legendre's and Laplace's series are indicated. Tamarkin (Providence).

Borofsky, S.: Expansion of functions defined by Dirichlet series into infinite series and products. Tôhoku math. J. 34, 263—274 (1931).

Gegenstand der Untersuchung ist die Darstellbarkeit einer durch eine Dirichlet'sche Reihe gegebenen Funktion

$$f(z) = b_0 + \sum_{r=1}^{\infty} b_r e^{-\beta_r z} \quad (0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots; \beta_n \rightarrow \infty) \quad (1)$$

in Form einer unendlichen Summe oder eines unendlichen Produktes, deren einzelne Glieder wieder Dirichlet'sche Reihen mit einer ganz bestimmten Exponentenfolge $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ sind. Diese λ_r sind, der Größe nach geordnet, die verschiedenen Werte aller möglichen Aggregate $g_1 \beta_{p_1} + g_2 \beta_{p_2} + \dots + g_m \beta_{p_m}$, ($m = 1, 2, \dots$), wobei die g_r irgendwelche nichtnegative ganze Zahlen bedeuten. Hat man nun eine in einer Halbebene konvergente Reihe

$$D(z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r z} \quad \text{mit} \quad c_r \geq 0 \quad (2)$$

und bildet man irgendeine Funktionsfolge

$$f_i(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(i)} e^{-\lambda_{\nu} z}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

wobei nur alle $|c_{\nu}^{(i)}| \leq c_{\nu}$ sein sollen, so kann stets in einer Halbebene die durch (1) gegebene Funktion $f(z)$ dargestellt werden in der Form

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} z} f_{\nu}(z); \quad (4)$$

dabei ist sogar die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu}| e^{-\lambda_{\nu} z} F_{\nu}(z)$ mit $F_{\nu}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{\nu}^{(i)}| e^{-\lambda_{\nu} z}$ gleichmäßig konvergent. (Theorem I.) Ist ferner d_1, d_2, \dots eine Zahlenfolge, zu der es zwei Konstanten R und $c > 0$ gibt, so daß stets $|\bar{d}_n| \leq e^{-\lambda_n R}$ und für alle n und k , für die λ_{n+k}/λ_n eine ganze Zahl ergibt, $|d_{n+k}/d_n| \geq 1/c$ ist, so läßt sich $f(z)$ in einer Halbebene in der Form

$$f(z) = p_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_{\nu} p_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} z}}{1 - p_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} z}} \quad (5)$$

darstellen. (Theorem II.) Wenn in (1) $b_0 = 1$ ist, so kann $f(z)$ unter den Bedingungen von Theorem II als unendliches Produkt

$$f(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - p_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} z})^{d_{\nu}/\lambda_{\nu}} \quad (6)$$

dargestellt werden. (Theorem III.) In den beiden letzten Fällen ist außerdem noch in der betreffenden Halbebene

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |d_{\nu} p_{\nu}| e^{-\lambda_{\nu} z} \{1 + |p_{\nu}| e^{-\lambda_{\nu} z} + |p_{\nu}|^2 e^{-2\lambda_{\nu} z} + \dots\}$$

gleichmäßig konvergent. In all diesen Entwicklungen sind die Koeffizienten eindeutig bestimmt. Wiarda (Dresden).

Korn, Arthur: Über Reihenentwicklungen nach Besselschen Funktionen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. H. 22/23, 437—449 (1931).

Es wird die Frage untersucht, unter welchen Bedingungen eine Funktion $f(x)$ sich in eine konvergente Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n J_n(x)$ entwickeln läßt, wobei $J_n(x)$ die n te Besselsche Funktion ist und die Konstanten α_n durch die Integrale

$$\alpha_n = 2n \int_0^{\infty} \frac{f(x) J_n(x)}{x} dx$$

bestimmt werden. Das Resultat der Arbeit, welches durch Anwendung des Fourier-schen Integraltheorems gewonnen wird, ist in dem folgenden Satz enthalten: Es sei $f(x)$ im Intervall $0 \leq x < \infty$ abteilungsweise monoton und stetig mit stetiger erster und endlicher, integrierbarer zweiter Ableitung; es sei ferner $f(0) = f'(0) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, derart, daß die Integrale

$$\int_0^{\infty} x^3 \Phi^2(x) dx, \quad \int_0^{\infty} |\Phi'| dx, \quad \int_0^{\infty} |\Phi''| dx \quad \left(\Phi(x) = \frac{f(x)}{x^3} \right)$$

existieren. Erfüllt dann $f(x)$ die Relationen

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x) J_0(x)}{x} dx = 0, \quad \int_0^{\infty} \frac{f(x) \operatorname{sim}(\alpha, x)}{x^2} dx = 0$$

(wobei $\operatorname{sim}(\alpha, x) = \sin(\alpha x) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x) (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})^{2n+1}$ ist), so kon-

vergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} J_{2n}(x)$ in jedem festen Intervall der positiven x -Achse gleichmäßig gegen $f(x)$. Lüneburg (Göttingen).

Hammerstein, A.: Über Entwicklungen nach orthogonalen Funktionen eines unendlichen Intervalls. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. H. 22/23, 450—457 (1931).

Es werden notwendige und hinreichende Kriterien für die Möglichkeit der Entwicklung einer Funktion nach einem im Intervall $0 \leq x < \infty$ orthogonalen Funktionensystem aufgestellt, die das Resultat von A. Korn (s. voransteh. Ref.) als Spezialfall enthalten. Das Orthogonalsystem $\Phi_n(x)$ soll dabei abgesehen von den Orthogonalitätseigenschaften noch die Bedingung erfüllen, daß die Reihe $\sum a_n \Phi_n(x)$ auf jeder Strecke $0 \leq x \leq A$ gleichmäßig konvergiert, wenn $\sum a_n^2$ konvergiert. Zu einem solchen Kriterium gelangt man durch Auswahl eines beliebigen stetigen abgeschlossenen Kernes $K(x, \xi)$, für welchen das Integral $\int K^2(x, \xi) dx$ existiert (so daß also für jede stetige quadratisch integrierbare Funktion $F(x)$ aus $\int K(x, \xi) F(x) dx = 0$ folgt: $F(x) \equiv 0$). Denn setzt man

$$\Phi(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_{\nu}(x) \int K(z, \xi) \Phi_{\nu}(z) dz,$$

so ist das Bestehen der Relation

$$\int \Phi(x, \xi) f(x) dx = 0$$

für die Entwickelbarkeit einer quadratisch integrierbaren Funktion $f(x)$ nach dem System $\Phi_n(x)$ notwendig und hinreichend. Für die Funktionen $\Phi_n(x) = 2\sqrt{n} \frac{J_{2n}(x)}{\sqrt{x}}$ und den Kern $K(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{\sin x \xi}{x} - \xi J_0(x) \right)$ ergibt sich das Resultat der Arbeit von Korn. Lüneburg (Göttingen).

Mickelson, E. L.: On the approximate representation of a function of two variables. Trans. amer. math. Soc. 33, 759—781 (1931).

The paper gives an extension to two (and more) variables of some methods and results known in the theory of approximate representation of a function of one variable by means of polynomials and trigonometric sums. The exposition closely follows that of D. Jackson ("The Theory of Approximation", Am. Math. Soc. Colloquium Publications, New York, 1930). Thus the starting point is the singular integral

$$h_{pq} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x+2u, y+2v) \left[\frac{\sin pu \sin qv}{(p \sin u)(q \sin v)} \right]^4 du dv \quad \left(\frac{1}{h_{pq}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin pu \sin qv}{(p \sin u)(q \sin v)} \right]^4 du dv \right),$$

where $g(x, y)$ is a continuous periodic function in x and y separately. This integral yields theorems on the possibility and the degree of convergence of the approximate representation of a function of 2 variables, under suitable conditions of continuity [the notions of modulus of continuity and of Lipschitz condition are properly extended] by means: a) of trigonometric sums, b) of polynomials, c) of mixed sums

$$\sum_{i,j} (a_{i,j} \cos ix + b_{i,j} \sin ix) y^j.$$

The author cites articles of P. Montel [Bull. Soc. Math. de France 46 (1918), pp. 151—192] and of Wilder [Rend. Palermo 39 (1915), pp. 345—361] dealing with approximate representation of functions of 2 variables, to which we may add Jackson's Inaugural Dissertation (Göttingen, 1911) and a paper by A. Marchand (J. des Math. (9), 6 (1927), pp. 337—425). The last part of Mickelson's paper deals with the approximate representation of a function of 2 variables $F(\theta, \varphi)$ on the surface of the unit sphere by means of partial sums of its Laplace series and of certain other sums $y_n(\theta, \varphi)$ of surface spherical harmonics which are to be chosen so as to minimize

$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [F(\theta, \varphi) - y_n(\theta, \varphi)]^m \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \quad (m > 0)$. The discussion, which again follows that of Jackson's Colloquium Lectures, makes use of some important results of Cronwall concerning Laplace series [Trans. Am. Math. Soc. **15** (1914), pp. 1—30; Math. Annalen **74** (1913), 213—270]. *J. Shohat* (Philadelphia).

Differentialgleichungen:

Martins in Biddau, Silvia: Sulla algebra delle forme differenziali a coefficienti reali. Rend. Ist. lombardo Sci., II. s. **64**, 575—595 (1931).

Einem gewöhnlichen linearen Differentialausdruck n -ter Ordnung der Form $L[u] = \sum_{i=0}^n l_i u^{(n-i)}$ kann man gewisse Begriffe zuordnen, die aufs engste mit den aus der Algebra her bekannten Begriffen für das entsprechende Polynom n -ten Grades verknüpft sind. So gibt der Autor notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß zwei derartige Differentialausdrücke eine gemeinsame „Wurzel“ haben, indem er aus ihren Koeffizienten eine „Resultante“ ableitet. Desgleichen wird eine „Diskriminante“ abgeleitet, deren Verschwinden notwendig und hinreichend für die Existenz einer „mehrfachen Wurzel“ eines solchen Differentialausdruckes ist. *Rellich*.

Pasquier, J.: Sur la recherche des équations $s = f(x, y, z, p, q)$ intégrables par la méthode de Darboux. C. r. Acad. Sci. Paris **193**, 216—217 (1931).

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{da(x, y, z, p)}{dy} + ab(x, y, z, q) + b_1(x, y, z, q) = 0$$

sich nach der Darboux'schen Methode integrieren läßt, d. h. daß eine von einer willkürlichen Funktion abhängige Schar von Differentialgleichungen 2. Ordnung existiert, die zu der gegebenen in Involution sind. *Lüneburg* (Göttingen).

Fukuhara, Masuo: Sur les singularités des fonctions définies par des équations différentielles ordinaires: I. Équations linéaires. Jap. J. Math. **8**, 17—29 (1931).

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$t \frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^n a_{ij}(t) x_i, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1)$$

Dabei sollen die $a_{ij}(t)$ eindeutige, stetige Funktionen der reellen Veränderlichen t in $0 \leq t \leq a$ sein. Verf. untersucht dann das asymptotische Verhalten der Lösungen von (1) bei $t \rightarrow 0$ [vgl. O. Perron, Math. Z. **29**, 158 ff. (1929). Vgl. ferner F. Lettenmeyer, Münch. Ber. **1929**, S. 201 ff., mit welcher die zu besprechende Arbeit Berührungspunkte aufweist]. Verf. beschränkt sich auf die Betrachtung der aus (1) durch ein-eindeutige Transformation der x_i zu gewinnenden Systeme

$$t \frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=i_k}^{i-1} \varrho_{ij} t^{\mu_j - \mu_i} z_j + \sum_{j=1}^n c_{ij}(t) t^{\mu_j - \mu_i} z_j, \quad (i = i_k, i_k + 1, \dots, i_{k+1} - 1; k = 1, \dots, l; i_1 = 1 < i_2 < \dots < i_l < i_{l+1} = n + 1) \quad (2)$$

wobei $c_{ij}(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$, wobei ferner ϱ_{ij} Konstante, insbesondere $\varrho_{ii} = \varrho_i = \mu_i + \nu_i \sqrt{-1}$ die Wurzeln von $|a_{ij} - \varrho| = 0$ sind in folgender Anordnung: $\varrho_{ik} = \varrho_{ik+1} = \dots = \varrho_{ik+1-1}$, $k = 1, \dots, l$; $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$. — Mit Hilfe sukzessiver Approximationen wird alsdann zu jedem α ($\alpha = 1, \dots, n$) ein Lösungssystem $\Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t)$ konstruiert von folgender Eigenschaft: Es sei $m = \text{Max. } \{i_2 - i_1, \dots, i_{l+1} - i_l\}$; ferner sei m'_α bzw. m''_α der kleinste bzw. größte Index τ , für welchen $\mu_\tau = \mu_\alpha$; endlich sei $M(t) = \text{Max. } \{|\Phi_1(t)| t^{\mu_1}, \dots, |\Phi_n(t)| t^{\mu_n}\}$, $M_1(t) = \text{Max. } \{|\Phi_{m'_\alpha}(t)| t^{\mu_\alpha}, \dots, |\Phi_{m''_\alpha}(t)| t^{\mu_\alpha}\}$. Dann gilt für (hinreichend kleines) positives h und $0 < \tau \leq h$:

$$M(t) \leq \left(A(h) \exp. \left\{ \int_t^h \frac{3\gamma(t)}{\lambda(t)} \frac{dt}{t} \right\} \right) t^{\mu_\alpha}, \quad M_1(t) \geq \left(B(h) \exp. \left\{ - \int_t^h \frac{2\gamma(t)}{\lambda(t)} \frac{dt}{t} \right\} \right) t^{\mu_\alpha}.$$

Dabei sind $A(h)$, $B(h)$ positive, nur von h abhängige Konstanten, während die Funktionen $\gamma(t)$, $\lambda(t)$ von t folgende Eigenschaften haben: $\gamma(t) > 0$, $\lambda(t) > 0$ in $0 < t \leq h$, $\lambda(t) \rightarrow 0$, $\gamma(t) \rightarrow 0$, $\frac{[\lambda(t)]^{1+\varepsilon}}{\gamma(t)} \rightarrow 0$, $\frac{\gamma(t)}{\lambda(t)} \rightarrow 0$, $\frac{t\lambda'(t)}{\gamma(t)} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. (Dabei $\varepsilon > 0$ gegebene Zahl; $\lambda' = \frac{d\lambda}{dt}$.) Hieraus folgert Verf.: $\frac{\log M(t)}{\log t} \rightarrow \mu_\alpha$, $\frac{\log M1(t)}{\log t} \rightarrow \mu_\alpha$ für $t \rightarrow 0$. (Vgl.

Lettenmeyer a. a. O., in dessen weitergehendem, übrigens einfacher bewiesenem Satz 3, a. a. O. Seite 221, die soeben angegebene Limesbeziehung von Fukuhara vollständig enthalten ist.) Durch passende Konstruktion von Funktionen $\lambda(t)$, $\gamma(t)$ der geforderten Art und passende Wahl der Lösungssysteme wird dann noch eine Umformung der obigen Ungleichungen erzielt, deren Begründung aber nicht im einzelnen durchgeführt ist. Haupt (Erlangen).

Fubini, Guido: Sui teoremi di esistenza e di unicità per i sistemi di equazioni differenziali. (Torino, 25. I. 1930.) Conf. Fis. e Mat. Torino 3–6 (1931).

● **Galbrun, H.:** Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère et théorie des zones de silence. Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1931.

Hopf, Eberhard: Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. 34, 194 bis 233 (1931).

Les équations du type elliptique dont il s'agit ici sont les équations non linéaires générales, à n variables indépendantes,

$$\Phi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}; u; x_1, \dots, x_n\right) = 0; \quad (1)$$

toutefois une partie du mémoire est consacrée à des considérations préliminaires sur les équations linéaires du type elliptique. Etant donnée l'opération du type elliptique

$$L(u) = \sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu \partial x_\mu}, \quad (2)$$

si l'on nomme $A_{\nu\mu}$ le mineur de $a_{\nu\mu}$ dans le déterminant de ces fonctions, ce déterminant étant supposé égal à 1, l'auteur, utilisant une idée de E. E. Levi, pose

$$\Omega(a; Z) = \sum_{\nu, \mu} A_{\nu\mu} z_\nu z_\mu, \quad \Gamma(a; Z) = \frac{\Omega(a; Z)^{\frac{n-2}{2}}}{n(n-2)e_n},$$

$$G(X, Y) = \Gamma(a(X), Y - X),$$

où e_n est la mesure du domaine intérieur à une hypersphère de rayon 1; on sait que

$$\sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu} \frac{\partial^2 \Gamma(a; Z)}{\partial z_\nu \partial z_\mu} = 0.$$

Si M est l'opération adjointe à L , et si u est une fonction quelconque, l'intégrale de $GL_Y(u) - uM_Y(G)$, relative à Y dans un domaine quelconque contenant X , peut se transformer par la formule de Green, et le résultat obtenu est fondamental pour la suite. Après quelques considérations sur des fonctions représentées par des intégrales analogues à des potentiels, l'auteur peut démontrer que si, dans l'équation du type elliptique

$$\sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu \partial x_\mu} + \sum_{\nu} b_{\nu}(X) \frac{\partial u}{\partial x_\nu} + c(X)u = f(X),$$

les dérivées partielles d'ordre $m \geq 0$ des fonctions $a_{\nu\mu}$, b_{ν} , c , f existent et remplissent une condition de Hölder d'exposant α , et si u admet des dérivées secondes continues en tout point d'un domaine \mathfrak{G} , alors les dérivées de u d'ordre $m+2$ existent et remplissent une condition de

Hölder d'exposant α . Arrivant alors à l'équation (1), l'auteur suppose que Φ est indéfiniment dérivable par rapport à tous ses arguments et démontre que, si les dérivées secondes de u existent et remplissent une condition de Hölder, u est indéfiniment dérivable par rapport à x_1, x_2, \dots, x_n ; un point délicat de la démonstration est l'existence et la continuité des dérivées troisièmes de u : un raisonnement rapide et direct, sans usage d'approximations successives, est donné pour cela par l'auteur. Après ces préliminaires, l'auteur vient à son but principal, relatif au cas où, pour une solution u de (1) et pour le point $X = 0$, Φ est analytique par rapport à tous ses arguments et du type elliptique. En supposant que les dérivées secondes de u existent et remplissent une condition de Hölder, on peut, d'après ce qui précède, dériver indéfiniment le 1^{er} membre de (1): l'auteur le dérive quatre fois, de toutes les façons possibles, puis, à l'aide de la formule de Green déjà rappelée, remplace, dans une certaine hypersphère de centre O , les équations obtenues par un système d'équations intégrales, non linéaires, dont les inconnues sont u et ses dérivées jusqu'au 4^e ordre. L'auteur montre alors comment les intégrales qui interviennent dans ces équations peuvent être étendues au domaine complexe, pourvu que les fonctions qui figurent sous le signe d'intégration soient définies dans ce domaine: l'auteur prend pour champ d'intégration l'ensemble des points des segments de droites joignant le point donné complexe X aux points réels d'une hypersphère de centre O et de rayon assez petit. Cela posé, l'auteur résoud par approximations successives les équations intégrales dont il a été question plus haut, dans un certain domaine complexe comprenant les points réels intérieurs à l'hypersphère, pourvu que le rayon de celle-ci soit assez petit; pour cela il définit d'abord d'une façon arbitraire, dans ce domaine complexe, des fonctions assujetties seulement à avoir des dérivées par rapport aux parties réelles et aux coefficients de i des variables, et à coïncider dans le domaine réel avec u et ses dérivées jusqu'au 4^e ordre: le plus simple est de prendre ces fonctions indépendantes des parties imaginaires des variables; les approximations successives convergent alors dans le domaine complexe, et les fonctions obtenues à la limite sont analytiques dans ce domaine, ce qui entraîne enfin que u est analytique. L'auteur a ainsi démontré que, si les dérivées secondes d'une solution u de (1) remplissent une condition de Hölder, u est analytique; le même résultat exactement a déjà été obtenu par G. Giraud d'une façon différente mais plus longue [Ann. de l'Ec. Norm. 47, 197—266, spécialement 241 (1930)], mais M. Hopf a connu seulement un mémoire antérieur du même auteur, où le résultat n'était obtenu que moyennant des hypothèses plus restrictives.

G. Giraud (Clermont-Ferrand).

Barinaga, J.: Integration einiger partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung und Untersuchung der zugehörigen Flächenfamilien. Rev. Acad. Ci. exact. etc. Madrid 26, 97—118 (1931) [Spanisch].

Geht man von dem Kurvenkomplex $f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0$ aus und setzt man voraus, daß die Parameter α, β, γ durch die beiden willkürlichen Beziehungen $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $F_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ verbunden sind, so kann man nachweisen, daß alle auf diese Weise darstellbaren Flächen des Komplexes derselben partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung genügen:

$$L^2r + 2LMs + M^2t + N = 0;$$

es sind dabei die Funktionen L, M, N abhängig von x, y, z, p, q . Ein besonders einfacher Fall, der rasch zur Differentialgleichung führt, liegt vor, wenn der Komplex durch die Ausdrücke $f_1(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$, $\gamma = \varphi_1(x, y, z)$ gegeben ist, sofern man die willkürlichen Beziehungen in der Form $\alpha = \Phi(\gamma)$, $\beta = \Phi_1(\gamma)$ annimmt. Ein Beispiel von dieser Form tritt auf, wenn man die Flächen untersucht, welche von einem festen Kreis erzeugt werden, dessen Mittelpunkt längs einer willkürlichen Raumkurve gleitet, während seine Ebene eine Parallelverschiebung erfährt. Die Gesamtheit der entstehenden Flächen läßt sich analytisch in der Form $[x - f(z)]^2 + [y - \varphi(z)]^2 = a^2$ dar-

stellen; die Elimination der willkürlichen Funktionen f, φ führt auf die Differentialgleichung

$$a(q^2r - 2pqg + p^2t) = (p^2 + q^2)^{3/2},$$

welche nach der Methode von Monge integriert auf den Ausgangsausdruck als allgemeines Integral zurückführt. Es schließt daran die Aufstellung der partiellen Differentialgleichung $p^2y^2 - (a^2 - y^2)q^2 = 0$ der Flächen, welche sich als Sonderfall aus der obigen Annahme ergeben, wenn man als Leitkurve nur Kurven einer bestimmten Ebene zuläßt; endlich werden noch einige differentialgeometrische Formeln für die verschiedenen Typen der Translationsflächen entwickelt, deren erzeugende Kurve und deren Leitkurve ein Kreis ist. In einem weiteren Abschnitt wird der Komplex aller Kreise des Raumes mit einem Durchmesser auf einer festen Geraden studiert; die Gesamtheit der Komplexflächen ist dann einerseits durch $x^2 + y^2 + [z - f(y/x)]^2 = \varphi(y/x)$ festgelegt und andererseits auch durch die Differentialgleichung $x^2r + 2xys + y^2t = (px + qy)[(px + qy)^2(x^2 + y^2)^{-1} + 1]$ gekennzeichnet. Im besonderen wird die Kongruenz $x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha z = 0$, $y = \gamma x$ mit der Differentialgleichung der zugeordneten Flächen: $px + qy = 2(x^2 + y^2)z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$ untersucht; die Kongruenz $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$, $y = \gamma x$ führt zu der Differentialgleichung

$$x^2 + y^2 + pxz + qyz = 0$$

der Kongruenzflächen; die Kongruenz $x^2 + y^2 + (z - \alpha)^2 = R^2$, $y = \beta x$ ergibt für die zugeordneten Flächen die Differentialgleichung

$$px + qy = \pm(x^2 + y^2)(R^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}.$$

Die Integration aller vorkommenden Differentialgleichungen bietet keine Schwierigkeiten und führt stets zu dem Flächensystem zurück, von welchem ausgegangen wurde.

F. Knoll (Wien).

Boerner, Hermann: Das Eigenwertproblem der selbstadjungierten linearen Differentialgleichung vierter Ordnung. Math. Z. 34, 293—319 (1931).

L. Lichtenstein hat in der Arbeit „Zur Analysis der unendlich vielen Variablen“ (Rendiconti circ. mat. Palermo 38, 113—166) das gewöhnliche Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem direkt auf ein lösbares Problem mit unendlich vielen Variablen zurückgeführt, ohne den üblichen Umweg über die Integralgleichung zu gehen. Diese Methode benutzt der Autor, um die entsprechenden Existenz- und Entwicklungssätze für die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(p(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left([\lambda^{(1)} r(x) + \lambda^{(2)} r_1(x)] \frac{du}{dx} \right) - [\lambda^{(3)} k(x) + \lambda^{(4)} k_1(x)] u(x) = k(x)$$

zu gewinnen. ($p(x) > 0$, $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \lambda^{(4)}$ sind Parameter, durch deren Spezialisierung — z. B. $\lambda^{(1)} = \lambda^{(3)} = \lambda$, $\lambda^{(2)} = \lambda^{(4)} = 0$ — eine Reihe von verschiedenen Eigenwertproblemen erhalten werden.) Als Randbedingung wird hauptsächlich $u(a) = u(b) = 0$, $u'(a) = u'(b) = 0$ zugrunde gelegt. Es wird aber auch der Fall von komplizierteren Randbedingungen betrachtet, bei dem insbesondere der Eigenwertparameter auch in der Randbedingung vorkommt. Es sei hervorgehoben, daß, ebenso wie in der Lichtensteinschen Arbeit, keine Voraussetzung von der Art $k(x) > 0$ gemacht wird. Es werden kurz die Ergebnisse für die entsprechende Differentialgleichung 2n-ter Ordnung zusammengetragen.

Rellick (Göttingen).

Severi, F.: Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 795—804 (1931).

L'auteur retrouve et complète les résultats de 2 mémoires antérieurs, grâce à une nouvelle méthode reposant sur la remarque suivante: si une fonct. anal. d'un nombre quelc. de var. est nulle pour toutes les valeurs réelles des var. voisines d'un certain système de valeurs, elle est identiquement nulle. Définitions: 2 variables complexes $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$. — Fonction biharmonique = partie réelle d'une $F(x, y)$ holomorphe. — Un point P d'une A analytique à 3 dim. réelles est simple si l'on peut, au voisin. de P , exprimer les coord. du point courant M de A en fonctions anal.

de 3 param. (réels) $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ qui soient des f. anal. indép. des coord. de M . Une f. anal. $\varphi(M)$ est, par défin., une f. anal. $\varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Problème local: étant donnée une hypersurf. Δ à 3 dim. réelles, anal. au voisin. d'un pt. simple P , à quelles conditions une f. anal. complexe (ou réelle) $\varphi(M)$ donnée sur Δ est-elle la trace sur Δ d'une f. holom. (ou biharmon.) au point P ? — Solution: 1° pour que $f(M)$ donnée soit la trace d'une $F(x, y)$ hol., il ft et il suf. que l'on ait sur Δ , au voisin. de P ,

$$\frac{D(f, x, y)}{D(\theta_1, \theta_2, \theta_3)} = 0, \quad (1)$$

et $F(x, y)$ cherchée est alors unique (on montre que (1) est suffisante en s'appuyant sur la remarque du début). — 2° pour que $u(M)$ réelle donnée soit la trace d'une $U(x_1, x_2, y_1, y_2)$ biharmon., il ft et il suf. que $u(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ satisf. à 2 équât. (réelles) aux dér. part. du 3° ordre, et U cherchée est alors unique. Ces 2 éq. expriment que si l'on remplace f par $u + iv$ dans (1), les 2 relations réelles obtenues permettent de calculer v en f. de u supposée donnée. Il y a exception si Δ est un hyperplanoïde (c.-à-d. s'obtient en annulant une f. biharm.); les 2 éq. du 3° ordre se réduisent alors à 1 éq. du 2^d ordre, et, si elle est vérifiée, U n'est pas unique. Problème global: ét. donné un domaine borné Γ limité par une hypersurf. anal. Δ dont tous les points sont simples, à quelles cond. une f. anal. complexe (ou réelle) $\varphi(M)$ donnée sur Δ est-elle la trace sur Δ d'une f. hol. (ou biharm.) dans Γ , frontière comprise? — Solution: il faut que le probl. local soit possible en tous les pts. de Δ ; cela suffit, d'après un théorème de Hartogs.

Henri Cartan (Strasbourg).

Gergen, J. J.: Note on a theorem of Bôcher and Koebe. Bull. amer. math. Soc. 37, 591—596 (1931).

Der Satz, daß eine im Gebiet R stetige und stetig differenzierbare Funktion $u(x, y)$ eine Potentialfunktion ist, wenn für jeden Kreis im Innern von R die Bedingung $\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ besteht (Bôcher, Koebe) wird in dem Sinne verallgemeinert, daß die Bedingung $\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ ersetzt wird durch die allgemeinere: $\int v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int u \frac{\partial v}{\partial n} ds$, wobei $v(x, y)$ eine beliebige positive Potentialfunktion in R ist. Lüneburg (Göttingen).

Somigliana, C.: Sulle linee di forza di campi newtoniani simmetrici intorno ad un asse. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. ecc. 66, 139—149 (1931).

Bekanntlich können die Kraftlinien eines Feldes, das einem gegebenen Potential V entspricht und eine Symmetrieachse besitzt, als Niveaulinien einer Funktion W aufgefaßt werden, die man durch eine Quadratur bestimmen kann. Der Verf. findet zunächst die Funktionen W_n, W_{-n-1} , die den harmonischen Funktionen der Gestalt $V_n = \varrho^n P_n(\cos \theta), V_{-n-1} = \varrho^{-n-1} P_n(\cos \theta)$ entsprechen; falls das Potential V durch eine Reihenentwicklung nach den Funktionen V_k gegeben ist, erhält man, statt der bekannten Integraldarstellung von W , die Darstellung dieser Funktion durch eine nach den Funktionen W_n fortschreitende Reihe. Folgt die Anwendung auf den Fall einer homogenen kreisförmigen Massenverteilung. G. Cimmino (Napoli).

Borofsky, S.: Linear homogeneous differential equations with Dirichlet series as coefficients. Ann. of Math., II. s. 32, 811—829 (1931).

Es sei $\sum_{i=0}^n P_i(x) y^{(n-i)} = 0, P_0(x) = 1, y^{(0)} = y$, wo

$$P_i(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{i,-\nu} e^{-\beta_{\nu} x} + b_{i,0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{i,\nu} e^{\alpha_{\nu} x} (\alpha_{\nu}, \beta_{\nu} > 0)$$

und die Dirichletschen Reihen in einer linken Halbebene absolut konvergieren. Gefragt wird nach der Existenz eines Fundamentalsystems der Form

$$y_i = e^{\lambda_i x} \sum_{\nu=0}^{n_i} x^{\nu} \varphi_{i,\nu}(x),$$

wo jedes φ sich in einer absolut konvergenten Dirichletschen Reihe mit nicht negativen Exponenten entwickeln läßt. Als eine schöne Verallgemeinerung eines klassischen

Resultates von Fuchs wird gezeigt, daß $b_{i,-\nu} = 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$; $\nu = 1, 2, \dots$ dafür notwendig und hinreichend ist. Zunächst wird unter Annahme dieser Bedingung eine formale Lösung der Form $\sum g_m e^{(\tau + \lambda_m)x}$ aufgesucht, wobei λ_m die Zahlen $\sum_1^{\infty} k_\nu \alpha_\nu$ durch-

laufen (k_ν ganz ≥ 0 , und zwar $= 0$ für alle große ν). Die Diskussion der determinierenden Fundamentalgleichung, die Bestimmung der Koeffizienten, die Konvergenz- und Vollständigkeitsbeweise folgen den klassischen Vorbildern von Frobenius, sind aber natürlich größtenteils viel schwieriger. Der Beweis, daß die Bedingung $b_{i,-\nu} = 0$ auch notwendig ist, wird durch Induktion in bezug auf n geführt und basiert eigentlich darauf, daß der Quotient zweier absolut konvergenten Dirichletschen Reihen mit nicht-negativen Exponenten sich in einer ebensolchen Reihe entwickeln läßt, wenn das Konstantglied des Nenners 0 ist. Für diesen Satz [Spezialfall eines Satzes von J.F. Ritt, Trans. amer. math. Soc. 31, 654 (1929)] wird ein neuer kurzer Beweis gegeben.

Hille (Princeton).

Ghermanesco, M.: Sur les fonctions n -métaharmoniques. C. r. Acad. Sci. Paris 193, 477—479 (1931).

Auf Grund einer für den Differentialausdruck

$$L[u] = \Delta^n u + \lambda_1 \Delta^{n-1} u + \dots + \lambda_n u$$

gebildeten Greenschen Formel wird ein Ausdruck für das Gebietsintegral $\int u d\omega_p$ über eine n -metaharmonische Funktion $u(x_1, \dots, x_p)$ ($L[u] = 0$) abgeleitet. Sodann

wird eine nur von $r = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$ abhängende Grundlösung der Gleichung $L[u] = 0$ aufgestellt, die im Nullpunkt eine Singularität der Form r^{2-p} besitzt. Lüneburg.

Horn, J.: Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen. Math. Annalen 105, 381—407 (1931).

Es wird zunächst eine Anzahl hypergeometrischer Reihen in zwei Veränderlichen aufgestellt, d. h. Potenzreihen der Form $\sum_{\lambda, \mu} A_{\lambda, \mu} x^\lambda y^\mu$ mit rationalen Quotienten

$A_{\lambda+1, \mu}/A_{\lambda, \mu} = f(\lambda, \mu)$, $A_{\lambda, \mu+1}/A_{\lambda, \mu} = g(\lambda, \mu)$. Die Ermittlung des Konvergenzgebietes kann nach den in einer früheren Arbeit des Verf. [Math. Annalen 34 (1889)] gemachten Angaben erfolgen. In manchen Fällen lassen sich weitere Lösungen des Systems linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung, dem die betreffende Reihe genügt, unmittelbar durch Doppelreihenansatz gewinnen. Für einige Beispiele, in denen das nicht möglich ist, weil sich die Integrale an der betreffenden Stelle unbestimmt verhalten, wird das System partieller auf ein System totaler Differentialgleichungen zurückgeführt und durch Diskussion der determinierenden Gleichung ein Fundamentalsystem gewonnen. v. Koppenfels (Hannover).

Schmidt, Hermann: Über multiplikative Funktionen und die daraus entspringenden Differentialsysteme. Math. Annalen 105, 325—380 (1931).

Verf. betrachtet zunächst die Gesamtheit (Klasse) k_0 der folgenden „multiplikativen“ Funktionen: $R(z) \cdot (z - a_0)^{\alpha_0} (z - a_1)^{\alpha_1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n}$. Dabei sollen die a_ν sämtlich untereinander verschieden sein; ferner sei keine der Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ reell ganzzahlig; $R(z)$ bedeutet eine rationale Funktion von z , welche höchstens in den a_ν sowie im unendlich fernen Punkt Pole besitzen soll. Man erhält die zu k_0 „komplementäre“ Klasse \check{k}_0 , indem man α_ν durch $-\alpha_\nu$ ersetzt ($\nu = 0, 1, \dots, n$). Für die Klasse k_0 bzw. \check{k}_0 lassen sich „Basen“ $g_1(z), \dots, g_n(z)$ bzw. $\check{g}_1(z), \dots, \check{g}_n(z)$ angeben in dem Sinne, daß jede Funktion von k_0 bzw. von \check{k}_0 sich darstellen läßt als Summe aus einem in den $g_\nu(z)$ [bzw. in den $\check{g}_\nu(z)$] linearen homogenen Ausdruck mit konstanten Koeffizienten und aus dem Differentialquotienten einer Funktion von k_0 (bzw. von \check{k}_0). Ferner existieren „Basen“ B_1, \dots, B_n (bzw. $\check{B}_1, \dots, \check{B}_n$) von „geschlossenen“ Integrationswegen in dem Sinne, daß das Integral einer Funktion von k_0 (bzw. \check{k}_0) erstreckt längs irgendeines „geschlossenen“ Weges sich linear und homogen mit Koeffizienten aus einem gewissen Ring zusammensetzen läßt aus den Integralen („Perioden“) der betrachteten Funktion längs der Wege B_ν (bzw. \check{B}_ν). Die Systeme

der n Perioden einer jeden der Funktionen $g_\nu(z)$ bzw. $\check{g}_\nu(z)$ bezüglich der B_ν bzw. \check{B}_ν ordnen sich bzw. in eine Matrix von n^2 Elementen. Zwischen den Elementen (Perioden) dieser beiden Matrizen bestehen n^2 bilineare Relationen. Verf. konstruiert zwei (übrigens nur von der gegenseitigen Lage der a_ν abhängige) Basen B_1, \dots, B_n bzw. $\check{B}_1, \dots, \check{B}_n$ (sog. „komplementäre Basen“), für welche diese Periodenrelationen eine besonders einfache Gestalt annehmen, und welche gerade auch für die nun folgenden Untersuchungen wichtig sind. Es werden nämlich jetzt die Verzweigungspunkte a_ν als algebraische Funktionen eines Parameters u angenommen; und zwar betrachtet man die Klasse $k_0^{(u)}$ der Funktionen $[f_1(z; u)]^{\alpha_1} \dots [f_r(z; u)]^{\alpha_r} R(z; u)$, wobei f_1, \dots, f_r Polynome in z und u sind, während $R(z; u)$ rational in z und u sein soll. Die zu $k_0^{(u)}$ komplementäre Klasse sei entsprechend mit $\check{k}_0^{(u)}$ bezeichnet. Konstruiert man nun zu $k_0^{(u)}$ bzw. zu $\check{k}_0^{(u)}$ in der oben angegebenen Weise, also insbesondere unter Benutzung der Wegbasen B_ν und \check{B}_ν , je n Periodensysteme, so (sind deren Elemente ihrerseits analytische Funktionen von u , und zwar) liefern diese n Periodensysteme je eine Basis für eine Riemannsche Klasse K_0 bzw. \check{K}_0 , wobei K_0 und \check{K}_0 zueinander komplementär sind. Dabei versteht man unter komplementären Riemannschen Klassen K_0 und \check{K}_0 allgemein zu reden folgendes: Eine Riemannsche Klasse werde (hier) erklärt als die Gesamtheit aller Systeme von je n Funktionen, wobei jedes System beim Umlauf um vorgegebene Punkte der Ebene (Stigmata) vorgegebene lineare Substitutionen mit konstanten Koeffizienten („Umlaufsubstitutionen“) erleidet und wobei alle Funktionen regulär sind bis auf die Stigmata, welche Stellen der Bestimmtheit für die in Rede stehenden Funktionen sein sollen. Ersetzt man jede der gegebenen Umlaufsubstitutionen durch ihre kontragrediente, so kommt man zur komplementären Klasse. — Im einzelnen ist noch zu bemerken: Kap. I bringt eine für den vorliegenden Spezialfall entsprechend vereinfachte bzw. modifizierte Herleitung der benötigten Sätze aus der Theorie von R. König. Auf den speziellen Fall des hypergeometrischen Differentialsystems [Schlesinger, Math. Z. 28, 504—518 (1928)] wird näher eingegangen und gezeigt, daß ein Fundamentalsystem dieses Differentialsystems (bis auf genau angebbare Ausnahmefälle) durch seine Gruppe eindeutig bestimmt ist. Genannt sei ferner die einfache Bestimmung sämtlicher Nullstellen der Betafunktion (vgl. die Frage bei F. Klein, Über die hypergeometrische Funktion, S. 146. Autogr. Leipzig 1906). Haupt (Erlangen).

Numerische und graphische Methoden.

● Lalande, Jérôme de: *Tafeln der fünfstelligen Logarithmen*. 5., neubearb. Ausg. Hrsg. v. A. Donadt. 2. Aufl. Leipzig: J. Brandstetter 1931. 228 S. RM. 2.25.

Platone, Giulio: *Sul metodo dei tentativi per il calcolo approssimato degli zeri di una funzione*. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 283—286 (1931).

Ist die Funktion $f(x)$ in dem abgeschlossenen Intervall (a, b) stetig und nimmt sie an den Enden Werte verschiedenen Vorzeichens an, so kann man nach der Vorschrift der Regula falsi das Intervall verkleinern und auf das neue Intervall dasselbe Verfahren abermals anwenden usw. Es wird bewiesen, daß dieser Vorgang entweder abbricht oder einen Grenzwert, eine Wurzel von $f(z) = 0$, liefert. L. Schrutka (Wien).

Terebesi, Paul: *Rechenschablonen im praktischen Zahlenrechnen*. (Math. Inst., Techn. Hochsch., Darmstadt.) Z. Instrumentenkde 51, 535—541 (1931).

Man kann bei numerischen Methoden durch Anwendung von Schablonen die Fehler vermeiden, die dadurch entstehen, daß man falsche Zahlen berücksichtigt u. dgl. Da die Rechenarbeit durch die Schablonen auch soweit als irgend möglich schematisiert wird, kann man dafür Hilfskräfte verwenden. An Beispielen wird die Durchführung von Rechnungen mit Schablonen gezeigt: Entwicklung von Determinanten nach Unterdeterminanten, Interpolation und Differentiation mit dem Differenzschema, harmonische Analyse nach dem 12-Ordinatenschema von C. Runge. Für die harmonische Analyse nach dem 24-Ordinatenschema wurden vom gleichen Verf. bereits Schablonen herausgegeben (Berlin: Julius Springer 1930). Koehler (Darmstadt).

Koning, C.: *Nomogramme zur Bestimmung der Wurzeln von Gleichungen vierten Grades*. Ingenieur 1931 II, A. 394—A. 403 [Holländisch].

Durch Reduktion wird die allgemeine Gleichung 4. Grades in bekannter Weise auf die Form gebracht $x^4 + bx^2 + cx + d = 0$, worin $b = 0, \pm 1$. Für jeden dieser drei Fälle wird die c, d -Ebene aufgeteilt in Gebiete mit vier oder zwei oder keinen reellen Wurzeln. Nach Entscheidung, welcher Fall jeweils vorliegt, ergeben sich die

reellen Wurzeln aus dem 1. Nomogramm (vgl. hierzu Schwerdt, *Anw. d. Nom. i. d. Math.*), Real- und Imaginärteil der komplexen Wurzeln mit einem 2. Nomogramm aus den vorher ermittelten reellen. Bei vier komplexen Wurzeln werden Real- und Imaginärteile getrennt in zwei weiteren Nomogrammen bestimmt. Grundlage und Entwurf der vier Nomogramme werden ausführlich besprochen, eine Gebrauchsanweisung und ein Zahlenbeispiel mit Genauigkeitsuntersuchung erläutern die Anwendung. Vgl. auch E. Dehn, *Algebraic Charts*, Oxford University Press. London: H. Milford 1930. (Vgl. dies. Zbl. 2, 47 [Schwerdt].) *S. Gradstein* (Darmstadt).

Palm, Franz: Geometrische Untersuchung von graphischen Tafeln zur Auflösung von vollständigen kubischen Gleichungen. *Anz. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl.* Nr 17, 172 (1931).

Es werden graphische Tafeln zur Auflösung von vollständigen kubischen Gleichungen $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ behandelt. Während bei einer früheren Tafel von d'Ocagne für den Koeffizienten a eine Linienschar benutzt wird und bei einer Tafel von Mehmke eine ähnliche Darstellung für c angewandt wird, wendet Palm die dritte Möglichkeit an, indem er für b eine Linienschar, für a und c Punktskalen, und für z , ebenso wie bei den früheren Tafeln, einen Parallelstrahlbüschel benutzt. Er gewinnt dadurch den Vorteil symmetrischer Kurven, welche er, nach Aufstellung einiger geometrischer Sätze, aus ihren Linienelementen zu konstruieren imstande ist.

Nyström (Helsingfors).

Palm, Franz Wilhelm: Über die nomographische Auflösung der Gleichungen vierten, fünften und sechsten Grades und die den Gleichungen zugeordneten Regelflächen. *Anz. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl.* Nr 16, 121—122 (1931).

Die Lillsche Darstellung ganzer rationaler Funktionen durch Rechtwinkeltzüge benutzend, entwickelt Palm nomographische Verfahren zur Auflösung von Gleichungen 4., 5., 6. Grades. Die Auflösung erfordert an konstruktiven Daten bzw. eine Parabel, eine Kurvenschar, eine Reihe von Kurventafeln. Zur bequemen Konstruktion dieser Hilfsmittel werden geometrische Sätze abgeleitet; auch werden räumliche Deutungen gegeben.

Nyström (Helsingfors).

Hohenemser, K.: Experimentelle Lösung ebener Potentialaufgaben. (*Inst. f. Angew. Mech., Univ. Göttingen.*) *Forsch. Ing.wes. B* 2, 370—371 (1931).

„Es wird ein im Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen hergestellter Apparat beschrieben, der auf elektrischem Wege die Lösung ebener Potentialaufgaben bei konstantem Randpotential gestattet. Er ist auch für Aufgaben der konformen Abbildung verwendbar.“ — In einer dünnen Elektrolytenschicht wird eine elektrische Strömung erzeugt. Die Äquipotentiallinien der dadurch gegebenen ebenen Potentialströmung können sehr einfach durch Abhören mit einem Telefon bestimmt werden.

Rellich (Göttingen).

Rösch, Siegfried: Der Spektralintegrator, ein Hilfsapparat zur Farbenberechnung aus dem Spektrum. (*Mineral.-Petrogr. Inst., Univ. Leipzig.*) *Z. techn. Phys.* 12, *Techn.-Opt. Sonderh.* Nr 2, 410—417 (1931).

Farbanalysen aus dem Spektrum werden erheblich durch Apparate erleichtert, welche Integrale von Produkten auswerten können. Für die Zwecke des Mineralogen werden jedesmal vier Produkte $i_\lambda r_\lambda, i_\lambda g_\lambda, i_\lambda b_\lambda, i_\lambda h_\lambda$ über bestimmte Intervalle integriert, wobei i_λ die spektrale Intensität als Funktion der Wellenlänge bedeutet und die anderen Faktoren bzw. die Grundempfindungswerte (rot, grün, blau) sowie der Helligkeitswert sind. Rösch erwähnt mehrere Wege zur Auswertung solcher Integrale und beschreibt ausführlich eine von ihm hergestellte Apparatur, die sich bereits bewährt hat und welche die Integration optisch ausführt. Dabei wird eine der Intensitätsverteilung des zu untersuchenden Spektrums entsprechende Schablone benutzt, auf welche der Reihe nach vier „Grauplatten“ gelegt werden, die dem Grundempfindungs- und dem Helligkeitswert entsprechen. Die photometrische Messung des jedesmal durchtretenden Lichtstroms ergibt dann die gesuchten Integralwerte. Da die Herstellung von wirk-

lichen Grauplatten schwierig ist, benutzt Rösch statt solcher rotierende, mit passenden Löchern versehene Scheiben. Dann müssen aber beim Zeichnen der Schablonen polare Koordinaten verwendet werden, und zwar treten wegen der notwendigen Flächentreue als Koordinatenlinien konzentrische Kreise und hyperbolische Spiralen $r\varphi = \text{const}$ auf.

Nyström (Helsingfors).

Geometrie.

Jeřábek, V., und J. Roháček: Über die Kornoide. Věstn. české Spol. Nauk, Tř. mat.-přirod. 1930, 11 S. mit franz. Zusammenfassung (1931) [Tschechisch].

Für die Definition der Kornoide s. G. Loria, Spez. alg. u. transz. ebene Kurven, 2. Aufl., 1, 287—288. Hier wird die Kurve als Projektion der Schnittkurve eines Konoides und einer Translationsfläche betrachtet und auf dieser Grundlage eine Konstruktion der Tangente angegeben. Zum Schluß wird die Kardoide als Grenzfall einer Kornoide betrachtet.

Čech (Brno).

Kruppa, Erwin: Darstellende Geometrie im Kugelgebüsch. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. IIa 140, 369—397 (1931).

Die Arbeit bringt eine darstellende Geometrie zunächst im hyperbolischen, dann im elliptischen Raum. Elemente und Transformationen der beiden Geometrien werden durch vorgesetztes h bzw. e gekennzeichnet. Als Modell wird das Kugelgebüsch benutzt: Nach Wahl einer Kugel u (reell im hyperbolischen, nullteilig im elliptischen Fall) sind alle zu u orthogonalen Kugeln als h - bzw. e -Ebenen aufzufassen. h -Punkt P ist jedes zu u inverse Punktepaa, h -Gerade jeder u rechtwinklig schneidende Kreis. Ist im e -Fall u' der reelle Vertreter von u , so ist e -Punkt jedes zu u' antiinverse Punktepaa, e -Gerade jeder Kreis durch die Endpunkte eines u' -Durchmessers. Nach Festlegung einer inversionsinvarianten Metrik wird ein rechtwinkliges Ebenenpaa Π_1, Π_2 (Grund- und Aufrißebene) durch den Mittelpunkt O von u gewählt (euklidisch also ebenfalls Ebenen!). Durch jeden Punkt P werden die zu Π_1 und Π_2 senkrechten h - (oder e -) Sehstrahlen gelegt und schneiden die Risse P' und P'' aus. Nach Umklappen von Π_1 in Π_2 liegen P' und P'' auf einem Ordner: die h -Ordner bilden das hyperbolische Kreisbüschel mit der Zentrale $x = [\Pi_1, \Pi_2]$ und dem Rechtwinkelkreis $[\Pi_2, u]$, die e -Ordner ein elliptisches Kreisbüschel. Für eigentliche Punkte darf im h -Fall P'' nach Wahl von P' nur auf einem Teil des h -Ordners gewählt werden. Ebenen sind durch Spuren darstellbar. Da die h -Spuren uneigentlich sein können, werden die Fluchtlinien der h -Ebenen eingeführt. — Mit dem so definierten allgemeinen Projektionsverfahren werden konstruiert die Bilder von h -Drehkegeln mit eigentlicher und uneigentlicher Spitze, d. h. von Spindel- und Hornzykliden bzw. Ringzykliden, ferner von Cliffordschen Flächen und Cliffordschen Parallelen. Die Konstruktionen werden einfacher, wenn man im h -Fall die feste Kugel u zur Ebene werden läßt und $\Pi_1, \Pi_2 \perp u$ wählt. Ordner sind jetzt die Kreise um $X = [xu]$. Es wird der h -Abstand zweier Punkte konstruiert, es werden verschiedene Kriterien für das Senkrechtstehen von h -Ebenen und h -Geraden angegeben. Im e -Fall wird eine bemerkenswerte Vereinfachung erzielt durch Wahl der Aufrißebenen $\Pi_2^* \equiv u'$ (also euklidisch: einer Kugel!). Rißachse ist der Kreis $[\Pi_1, u']$. Es stellt sich heraus, daß die e -Umklappung von Π_2^* zugleich eine stereographische Projektion von u' auf Π_1 ist. Dadurch erreicht man, daß die Ordner in der Zeichenebene die Strahlen durch O werden. — Jedem der beiden Teile der Arbeit geht eine Einführung in die ebene h - und e -Geometrie, die Geometrie im Kreisbündel, mit an Figuren erläuterten Konstruktionen voraus. Die Arbeit ist ein Ausschnitt einer an der Wiener Technischen Hochschule gehaltenen Vorlesung.

Rehbock (Bonn).

Shaub, H. C., and Hazel E. Schoonmaker: The Hessian configuration and its relation to the group of order 216. Amer. math. Monthly 38, 388—393 (1931).

Aufbau der G_{216} mit Hilfe erzeugender Transformationen unter Bevorzugung synthetisch-geometrischer Überlegungen.

E. A. Weiss (Bonn).

Rehbock, Fritz: Zur Abbildung des Punkt- und Ebenenraumes auf die Kinematik der hyperbolischen und elliptischen Ebene. *Mh. f. Math.* 38, 257—274 (1931).

Die Arbeit knüpft an die Untersuchungen an, die der Verf. über „die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahlabbildungen der darstellenden Geometrie“ [*Z. angew. Math. u. Mech.* 6 (1926)] veröffentlicht hat. Grundlegend ist eine dortselbst eingehend behandelte lineare Abbildung des Strahlraumes, die, was bedauerlicherweise nicht hervorgehoben wird, zuerst von L. Eckhart (Über die Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie, Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. IIa, 132, 187) gefunden wurde. Diese Abbildung ist insofern linear, als sie die Strahlbüschel des Raumes in Strahlbüschel der Bildebene Π überführt, wobei sich die Büschelscheitel in einer Netzprojektion entsprechen. Die Abbildung ordnet einer Raumgeraden G i. a. eindeutig eine Bildgerade G' zu und zwar so, daß der zu G bezüglich einer bestimmten Fläche 2. Ordnung Φ konjugierten Geraden G dieselbe Bildgerade G' gehört. Bildet man den Strahlraum durch das genannte Verfahren zweimal ab, wozu die beiden Erzeugendenscharen von Φ die einfachste Möglichkeit bieten, so zeigt es sich, daß die Strahlen eines Bündels mit dem Scheitel α und zugleich die Strahlen des zu α polaren Feldes auf die Strahlenpaare einer Kollineation abgebildet werden, die den Kegelschnitt Δ , in dem sich Φ und Π schneiden, in sich überführt. Hat Φ reelle Erzeugende, so ist Δ ein einteiliger Kegelschnitt. Faßt man ihn als Maßkegelschnitt einer hyperbolischen Geometrie auf, so hat man das zuerst von L. Eckhart (Konstruktive Abbildungsmethoden, 52—57. Wien 1926) explizit ausgesprochene Übertragungsprinzip zwischen den Raumpunkten α und den Bewegungen einer hyperbolischen Geometrie in Π . Entsprechend gehört zu einem nullteiligen Φ eine elliptische Geometrie in Π . Es sei mir gestattet, darauf hinzuweisen, daß K. Strubecker [Zur nichteuklidischen Geraden-Kugel-Transformation, Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. IIa 139 (1930)] aufmerksam gemacht hat, daß die Eckhartsche Abbildung des Strahlraumes der allgemeine projektive Typus der berühmten Studyschen Abbildung der Linienskreuze des elliptischen Raumes auf die Strahlenpaare eines Bündes (der Speere des elliptischen Raumes auf die Punktepaare einer Kugel) ist. — In der vorliegenden Arbeit wird die genannte Strahlabbildung auf synthetisch-konstruktivem Wege überaus anschaulich unter exakter Hervorhebung der auftretenden Singularitäten erörtert.

Erwin Kruppa (Wien).

Schmid, W.: Zur Imaginärgeometrie des Raumes. *Mh. f. Math.* 38, 291—300 (1931).

Im Anschluß an E. Study (Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie 1, 121 Leipzig 1911,) wird das „2. Bild“ imaginärer analytischer Raumkurven behandelt. Eine solche Kurve wird nach Study auf ein Paar von Translationsflächen abgebildet, die durch parallele Normalen flächentreu aufeinander bezogen sind. Neben diesen Bildflächen benutzt der Verf. noch zwei andere, auf einfache Weise mit den ersten zusammenhängende. Er untersucht das Verhalten des Krümmungsmaßes und der Haupttangente in entsprechenden Punkten und gelangt dadurch, daß er die abzubildende Kurve einer einparametrischen Schar von Homothetien unterwirft, zu einer stetigen Deformation der Bildflächen mit Erhaltung der Stellung der Tangentialebene, der Größe der Flächenelemente und des Krümmungsmaßes. Im Falle einer Minimalkurve wird er so auf Minimalflächen geführt, die stetig ineinander verbiegbar sind, insbesondere zu den Bonnetschen assoziierten und adjungierten Minimalflächen. (Vgl. W. C. Graustein, Eine reelle Abbildung analytischer komplexer Raumkurven. Diss. Bonn 1913.)

E. A. Weiss (Bonn).

Kowalewski, Gerhard: Die Epizykloiden in der Geometrie der Kreisverwandtschaften. *Tôhoku math. J.* 34, 130—144 (1931).

Die Gruppe der Kreisverwandtschaften wird einerseits auf Kurvenelemente vierter Ordnung $(x, y, y_1, y_2, y_3, y_4)$, andererseits auf Elemente (x, y, x, y, y_1, y_2) zweiter

Ordnung mit einem getrennt davon liegenden Punkt (x, y) erweitert. Dann existiert bekanntlich das konforme Bogenelement

$$ds = (1 + y_1^2)^{-\frac{1}{2}} (y_3 - \varphi)^{\frac{1}{2}} dx, \quad \varphi = \frac{3y_1 y_2^2}{1 + y_1^2},$$

wo $y_3 - \varphi(x, y, y_1, y_2) = 0$ die Differentialgleichung aller Kreise vorstellt. $s = \int ds$ wird als natürlicher Parameter benutzt. Ableitungen nach s werden durch Punkte bezeichnet. Weiter existiert die Invariante

$$J = \frac{-2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (\ddot{x}\ddot{x} + \ddot{y}\ddot{y}) + \frac{3}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2} (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}) (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} + \ddot{y}\dot{x}),$$

die bis auf einen Faktor -2 mit der Sylvesterschen Reziprokante identisch ist. Die natürliche Gleichung einer Kurve, invariant gegenüber der Gruppe der Kreisverwandtschaften, wird also gegeben durch \mathfrak{J} als Funktion von s . Durch ihre natürliche Gleichung und ein Anfangselement vierter Ordnung ist die Kurve eindeutig bestimmt. Die einfachsten Kurven (die Kreise ausgenommen) sind die „ \mathfrak{J} -Kurven“, die durch $\mathfrak{J} = \text{konst.}$ gekennzeichnet sind; sie sind isogonale Trajektorien der Kreisbüschel und mit den logarithmischen Spiralen kreisverwandt. Es gibt deren ∞^6 . Eine Epizykloide der Gruppe der Kreisverwandtschaft wird nun etwa folgendermaßen definiert. Es sei \mathfrak{R}_1 eine feste \mathfrak{J} -Kurve (mit der Konstanten \mathfrak{J}_1), \mathfrak{R}_2 eine zweite \mathfrak{J} -Kurve (mit der Konstanten $\mathfrak{J}_2 \neq \mathfrak{J}_1$). Man läßt nun \mathfrak{R}_2 über \mathfrak{R}_1 „rollen“. Damit ist folgendes gemeint. In der Anfangslage hat \mathfrak{R}_2 mit \mathfrak{R}_1 irgendein Element e_0 (vierter Ordnung) gemeinsam. Es sei nun für irgendein s $e_1(s)$ das Kurvenelement (vierter Ordnung) von \mathfrak{R}_1 , das von e_0 (längs \mathfrak{R}_1 gemessen) die konforme „Entfernung“ s hat, und $e_2(s)$ das Element von \mathfrak{R}_2 , das (längs \mathfrak{R}_2) von e_2 die konforme Entfernung s hat. Fordert man nun, daß stets $e_2(s)$ mit $e_1(s)$ zusammenfällt, dann ist dadurch die jeweilige Lage nicht nur von \mathfrak{R}_2 selbst, sondern auch von jedem mit \mathfrak{R}_2 fest verbundenen Punkte eindeutig bestimmt. Eine Epizykloide ist nun der Ort eines solchen mit \mathfrak{R}_2 fest verbundenen Punktes. Ihre Koordinaten werden durch hyperbolische Funktionen von s ausgedrückt. Insbesondere sind die Epizykloiden, die die beiden asymptotischen Punkte von \mathfrak{R}_2 beschreiben, selbst \mathfrak{J} -Kurven mit $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1$, die also mit der festen Kurve \mathfrak{R}_1 kreisverwandt sind. Die Rechnungen werden überwiegend in cartesischen Orthogonalkoordinaten (nicht invariant) durchgeführt; manchmal wird auch die Darstellung der Punkte der Ebene durch komplexe Zahlen benutzt. Tetrazyklische Koordinaten werden vorübergehend einmal benutzt.

D. van Dantzig (Rijswijk).

Huber, A.: Graphische Integration und W -Kurven. *Mh. f. Math.* 38, 345–346 (1931).

Es wird von Huber gezeigt, daß eine bei der graphischen Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung bisweilen angewandte Methode in sehr einfacher Weise auf die W -Kurven führt. Man faßt die ∞^2 Linienelemente der Ebene so zu ∞^1 Büscheln zusammen, daß die Scheitel s_i dieser Büschel eine gewisse Kurve erfüllen, und betrachtet die Schar der Ortlinien C_i der Träger derjenigen Linienelemente, die einem bestimmten Büschel angehören. Als Integralkurven findet man nun die W -Kurven in dem speziellen Falle, wo die Schar der C_i ein Geradenbüschel ist und die s_i eine dazu projektive Punktreihe bilden.

Nyström (Helsingfors).

Mercogliano, D.: Sulle equazioni della superficie di Veronese. *Atti Accad. naz. Lincei*, VI. s. 14, 12–14 (1931).

Es wird gezeigt, daß die üblichen, durch Nullsetzen der zweireihigen Minoren der symmetrischen Determinante $|X_{ik}|$ ($i, k = 0, 1, 2$) entstandenen Gleichungen der F_2^4 von Veronese den folgenden vier äquivalent sind:

$$X_{00}X_{11} - X_{01}^2 = 0; \quad X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = 0; \quad X_{22}X_{00} - X_{02}^2 = 0;$$

$$X_{00}X_{11}X_{22} - X_{01}X_{02}X_{12} = 0.$$

O. Borůvka (Brno).

Palozzi, G.: *Corrispondenze proiettivamente associate, in un punto, ad una superficie.* Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 14—20 (1931).

Sei O ein fester Punkt einer Fläche σ . Eine Ebene μ durch O schneidet σ in einer Kurve C . Die asymptotischen Tangenten von σ in den Punkten von C bilden zwei Regelflächen R_1 und R_2 ; seien Q_1 und Q_2 die Schmiege- F_2 von R_1 und R_2 in O . Seien P_1 und P_2 die Pole von μ in bezug auf Q_1 und Q_2 . Auf Anregung Bompianis untersucht Verf. die Cremonaschen Korrespondenzen (μ, P_1) , (μ, P_2) , (P_1, P_2) . Die beiden ersten sind quadratisch, die letzte ist kubisch. Alle drei sind Sonderfälle der im § 39 des Buches G. Fubini und E. Čech, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces* (Paris 1931), untersuchten Korrespondenzen. Čech (Brno).

Godeaux, Lucien: *Remarques sur les surfaces réglées.* Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 6, 158—163 u. Bol. Semin. mat. argent. Nr 8, 9—15 (1931).

Wenn man die Geraden des dreidimensionalen Raumes R_3 in bekannter Weise auf eine Hyperfläche zweiter Ordnung Q des R_3 abbildet, so entspricht bekanntlich den Asymptotentangenten einer nicht geradlinigen Fläche des R_3 ein konjugiertes Kurvennetz auf Q , welches von Bompiani, Godeaux, Terracini und Tzitzéica wiederholt eingehend untersucht wurde. Hier werden analog auch die Regelflächen des R_3 behandelt, was zu einer neuen Ableitung einiger einfacher bekannter Resultate führt. Čech (Brno).

● **Kowalewski, Gerhard:** *Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen.* (Göschens Lehrbücherei. Bd. 19.) Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter 1931. 280 S. RM. 15.50.

Hopf, H., und W. Rinow: *Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche.* Commentarii math. helvet. 3, 209—225 (1931).

Die Differentialgeometrie im Großen beschäftigt sich mit ganzen Flächen, d. h. solchen, die sich nicht durch Hinzufügung neuer Punkte oder Stücke vergrößern lassen. Geschlossene Flächen sind ganze Flächen. Für offene Flächen dagegen gibt es keine zwangsläufige Definition der differentialgeometrischen Ganzheit. Verff. untersuchen die sich am natürlichsten darbietenden Definitionen in bezug auf ihre Zweckmäßigkeit. Folgende Begriffsbildungen werden zugrunde gelegt. Eine topologische Fläche ist ein zusammenhängender topologischer Raum, in dem es ein abzählbares vollständiges System von Umgebungen — im Sinne von Hausdorff — gibt, von welchen eine jede sich topologisch auf das Innere eines Kreises der euklidischen Ebene abbilden läßt. Führt man in jeder dieser Umgebungen ein euklidisches Koordinatensystem derart ein, daß in den gemeinsamen Teilen von je zwei Umgebungen die Koordinaten der zugehörigen Systeme durch analytische Transformationen mit von Null verschiedener Funktionaldeterminante zusammenhängen, so wird die topologische Fläche zu einer analytischen Fläche. Man lege weiter in einer jeden der Umgebungen durch je eine positiv definite quadratische Differentialform, mit in den Koordinaten der betreffenden Umgebung analytischen Koeffizienten, eine Längenmessung derart zugrunde, daß für gemeinsame Teile je zweier Umgebungen die zugehörigen Längenmessungen dieselbe Länge für alle Bögen ergeben. Alsdann liegt eine differentialgeometrische Fläche vor; in der Folge wird eine solche einfach als Fläche bezeichnet, da nur solche differentialgeometrischen Flächen betrachtet werden. Je zwei Punkte einer Fläche können durch Bögen mit endlicher Länge verbunden werden; die untere Grenze dieser Längen wird als Distanz der beiden Punkte erklärt und mit $\varrho(P, Q)$ bezeichnet. Durch Einführung dieser Distanz wird die Fläche zu einem metrischen Raum, und die Begriffe von kompakten und beschränkten Punktmengen übertragen sich von der Theorie solcher Räume ohne weiteres. Eine Fundamentalfolge von Punkten P_n ist eine solche, welche das Cauchysche Kriterium $\varrho(P_n, P_m) \rightarrow 0$ erfüllt. — Läßt sich eine Fläche F' auf echtes Teilgebiet G einer zweiten Fläche F eindeutig und längentreu abbilden, so heißt F eine Fortsetzung von F' . Damit ist auch gesagt, was unter einer nicht fortsetzbaren Fläche zu verstehen ist. — Es

werden nun folgende Klassen von Flächen betrachtet. \mathfrak{F}_0 ist die Klasse der nicht fortsetzbaren Flächen. \mathfrak{F}_1 ist die Klasse der Flächen mit der Eigenschaft, daß auf jedem geodetischen Strahle von dessen Anfangspunkt aus jede Strecke abgetragen werden kann. \mathfrak{F}_2 ist die Klasse der Flächen, auf denen jede divergente Linie unendlich lang ist (eine divergente Linie ist topologisches Bild der Strecke $s: 0 \leq t < 1$ derart, daß jeder divergenten Punktfolge auf s eine divergente Punktfolge auf der Fläche entspricht). \mathfrak{F}_3 ist die Klasse der Flächen, auf welchen jede Fundamentalfolge konvergent ist. \mathfrak{F}_4 ist die Klasse der Flächen, auf welchen jede beschränkte Punktmenge kompakt ist. — Dann wird folgendes gezeigt. Die Klassen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4$ sind identisch; die ihnen angehörigen Flächen werden als vollständig bezeichnet. Vollständige Flächen sind nicht fortsetzbar; es gibt aber nicht fortsetzbare Flächen, die nicht vollständig sind. Eine Reihe von fundamentalen Sätzen der Differentialgeometrie im Großen bleiben gültig in der Klasse der vollständigen Flächen, während sie in der Klasse der nicht fortsetzbaren Flächen ihre Gültigkeit verlieren. — So scheint die Vollständigkeit die zweckmäßige genaue Formulierung der differentialgeometrischen Ganzheit darzustellen; diese Auffassung soll in einer demnächst in der Math. Zeitschrift erscheinenden Arbeit des zweiten der beiden Verff. weitere Bestätigung finden. — Es werde bemerkt, daß eine differentialgeometrische Fläche, im Sinne der besprochenen Arbeit, unter den allgemeinen Begriff der Riemannschen Fläche fällt; dann aber ist die Voraussetzung der Verff., daß ein abzählbares vollständiges Umgebungssystem existiert, von selbst erfüllt und daher überflüssig, wie Referent bewiesen hatte (Über den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta Szeged 2, 1925).
Tibor Radó (Columbus).

● **Fubini, Guido, et Eduard Čech: Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces.** Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1931. VI, 292 S. Frs. 60.—.

Kawaguchi, Akitsugu: Über projektive Differentialgeometrie. VI. Die Flächentheorie im R_3 und ihre Beziehung mit derselben von Fubini. J. Fac. of Sci. Hokkaido Univ. I 1, 97—155 (1931).

Ist u, v ein nicht konjugiertes Netz auf einer Fläche F des R_3 und zieht man in jedem Punkte (u_0, v_0) von F die F_2 (= Fläche 2. Ordnung) durch die Tangenten an die Linien u in drei benachbarten Punkten der Linie v , so bleibt diese F_2 dann und nur dann ungeändert bei Vertauschung von u mit v , wenn u, v das Asymptotennetz von F ist (die F_2 ist dann die Liesche F_2 von F). Dies Ergebnis ist nicht neu (s. Scheffers, Sitzgsber. Berl. Math. Ges., 1915, 68—79), was Verf. nicht bemerkt hat. Thomsen hat 1925 (Hamb. Abh., 4) eine einfache Bedingung dafür angegeben, daß ein System von $\infty^2 F_2$ das Liesche F_2 -System einer Fläche sei, diese Bedingung jedoch nur in Linienkoordinaten rechnerisch aufgestellt. Hier wird die Bedingung in F_2 -Koordinaten aufgestellt, in denen sie auch eine sehr einfache Form hat. Auch wird in F_2 -Koordinaten eine einfache Bedingung aufgestellt, daß ein System von $\infty^2 F_2$ von Darbouxschen F_2 einer Fläche gebildet werde. Als Anwendung einer vom Verf. früher angegebenen [Tôhoku, Math. J. 30, 257—277 (1929)] projektiven Behandlungsweise von Systemen von $\infty^m F_2$ im R_n wird eine projektive Differentialgeometrie einer Fläche in F_2 -Koordinaten entwickelt (die Fläche wird als Enveloppe ihrer Lieschen F_2 betrachtet, wie bei Thomsen l. c., wo jedoch die Untersuchung in Linienkoordinaten geführt wird). Die Beziehungen zur Fubinischen Theorie in Punktkoordinaten werden aufgestellt.
Čech (Brno).

Širokov, P.: Über eine Anwendung der dualen Theorie der Dynamen in der Differentialgeometrie. Izv. fiz.-mat. Obšč. kazan. Univ., III. s. 4, 85—88 u. dtsch. Zusammenfassung 88 (1931) [Russisch].

L'auteur applique la méthode de la géométrie réglée complexe de M. D. Seiliger (Izv. fiz.-mat. Obšč. Kazan. Univ. 3, 1) à la géométrie différentielle de la surface et de l'espace euclidien à 3 dimensions. Il introduit les bivecteurs complexes

$$E = e + \omega [re], \quad N = n + \omega [rn]$$

$\alpha \qquad \qquad \alpha \qquad \qquad \alpha$

où \mathbf{r} est le rayon vecteur de la surface, $\mathbf{e} = \partial_{\alpha} \mathbf{r}$ — les vecteurs tangents aux lignes coordonnées de la surface, \mathbf{n} — le vecteur unitaire de la normale et ω — l'unité de Christoffel de type parabolique $[\omega^2 = 0]$. En décomposant leurs dérivées suivant les mêmes bivecteurs il obtient les formules qui généralisent les formules classiques de Gauss et de Weingarten. Exemple

$$\partial_{\alpha} \mathbf{E} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \mathbf{E}_{\sigma} + H_{\alpha\beta} \mathbf{N}$$

où $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$ est le symbole de Christoffel et $H_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \omega \varepsilon_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$ étant le second tenseur fondamental de la surface et $\varepsilon_{\alpha\beta}$ son tenseur discriminant. *S. Finikoff.*

Vahlen, K. Th.: Beispiele zu einer Differenzengeometrie. *Mh. f. Math.* **38**, 373—376 (1931).

1. Die Gauß-Bonnetsche Formel wird durch Grenzübergang aus einer entsprechenden Formel gewonnen, die sich für Polyederstücke leicht aufstellen und beweisen läßt (man vergleiche: R. Sauer, Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-physik. Kl. **1929**, 307). — 2. Die Starrheit der Eiflächen soll aus Betrachtungen über Dreieckspolyeder hergeleitet werden. Die von Cauchy und Dehn abweichenden Beweisansdeutungen sind Ref. unverständlich. U. a. wird anscheinend behauptet, auch nicht-konvexe Dreieckspolyeder könnten höchstens wacklig, aber nicht beweglich sein, was durch die bekannten Bricardschen Oktaeder widerlegt ist. 3. Der Vierscheitelsatz wird auf sehr anschauliche Weise gewonnen, indem zunächst Bögen betrachtet werden, die aus glatt aneinanderschließenden Kreisbögen zusammengesetzt sind; dann folgt alles aus elementaren Sätzen über den Schnitt zweier Kreise. Eine dem Vierscheitelsatz analoge Aussage wird für geschlossene Kurven auf Eiflächen formuliert und analog bewiesen. *Cohn-Vossen (Köln).*

Barba, G.: Parallelismo generalizzato in una V_3 . I. *Atti Accad. naz. Lincei*, VI. s. **14**, 78—81 (1931).

In einem n -dimensionalen Raume bestimmen n linear unabhängige Kurvenkongruenzen K_i bekanntlich eine Richtungsübertragung und den darauf gegründeten Begriff der Parallelübertragung. Ist außerdem eine Metrik gegeben und $n = 2$, so kann man die Parallelübertragung folgendermaßen erklären: Ein Richtungsfeld R ist (K_i) -parallel mit sich selbst, wenn der Winkel RK_i konstant ist. Diese Definition führt augenscheinlich nur dann zum Fernparallelismus, wenn die Kongruenzen K_1 und K_2 sich isogonal schneiden. Insbesondere also, wenn K_1, K_2 aus geodätischen Kurven der gegebenen Metrik bestehen, kann man diesen Begriff des Fernparallelismus nur auf abwickelbaren Flächen einführen. *Hlavatý (Prag).*

Ruse, H. S.: An absolute partial differential calculus. *Quart. J. Math.*, Oxford ser. **2**, 190—202 (1931).

x^{ν}, y^i seien unabhängige Sätze von Variablen. (Die griechischen Indizes durchlaufen die Symbole a_1, \dots, a_n , während die lateinischen die Symbole $1, \dots, m$ zu durchlaufen haben.) Der Inbegriff von Bestimmungszahlen $T^{ri}(x, y)$, welche sich beim Übergang

$$\bar{x} = x(x) \quad \bar{y} = y(y) \quad (1)$$

nach

$$\bar{T}^{ri} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\lambda}} \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^j} T^{\lambda j} \quad (2)$$

transformieren, ist ein zweifacher kontravarianter Vektor. Analog kann man zweifache Affinoren definieren. Die kovariante Ableitung wird folgendermaßen eingeführt

$$V_{\mu} T^{ri} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} T^{ri} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} T^{\lambda i}, \quad V_j T^{ri} = \frac{\partial}{\partial y^j} T^{ri} + \Gamma_{kj}^i T^{rk}. \quad (3)$$

Dabei sind $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}, \Gamma_{jk}^i$ Koeffizienten, welche sich beim Übergang (1) nach

$$\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\lambda}} \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\lambda}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\lambda} \partial \bar{x}^{\mu}} \right), \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i = \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^j} \left(\frac{\partial y^q}{\partial \bar{y}^j} \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^k} \Gamma_{qr}^p + \frac{\partial^2 y^p}{\partial \bar{y}^j \partial \bar{y}^k} \right)$$

transformieren. Außer den bekannten Identitäten vom Ricci für $V_{[\mu} V_{\lambda]}$ und $V_{[\mu} V_{\nu]}$ (siehe Schouten: Der Ricci-Kalkül, S. 85 [Berlin: Julius Springer, 1924,]) ist hier noch

$$2V_{[\mu} V_{\lambda]} T^{\nu i} = T^{\alpha i} \frac{\partial}{\partial y^j} \Gamma_{\alpha \mu}^{\nu} - T^{\nu k} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma_{k j}^i. \quad (4)$$

Diese Resultate werden auf metrische Räume angewendet, und somit kommt man auch zu den (verallgemeinerten) Christoffelschen Symbolen und Rotationskoeffizienten. Ein Spezialfall wurde vom Autor schon früher behandelt [Proc. London Math. Soc. **32**, 87 (1931); siehe dies. Zbl. **1**, 169]. Insbesondere gestattet diese Methode die Trennung vom Raum-Zeit der Relativitätstheorie auf Zeit und Raum. Bemerkung des Referenten: Unter leichter Abänderung läßt sich diese Methode auf das Studium vom X_m in X_n ($m < n$) anwenden. Man bekommt in dieser Weise die Lagrangesche Methode (Mémorial des Sciences math. **19**). Hlavatý (Prag).

Golab, Stanislaw, und Hasso Härle: Minkowskische Geometrie. I und II. Mh. f. Math. **38**, 387—398 (1931).

An die Minkowskische Abstandsfunktion $\varrho(a, b)$ zweier Punkte a, b des affinen n -dimensionalen Raumes werde zunächst nur die Forderung gestellt, daß $\varrho(a, b)$ für $a \neq b$ stets positiv sein soll und daß stets $\varrho(a, b) = \varrho(c, d)$ gelten soll, wenn ab und cd gleiche Vektoren sind. Dann ist bekanntlich $\varrho(a, b)$ im ganzen Raum durch Angabe einer Eichfläche E bestimmt. $\varrho(a, b)$ erfüllt die schwache bzw. die starke Dreiecksungleichung, wenn E nirgends konkav bzw. konvex ist. In der vorl. Arbeit wird allgemeiner der Konvexitätscharakter von E in einzelnen Punkten damit in Zusammenhang gebracht, ob die Dreiecksungleichung in einzelnen Richtungen gilt („geodätische Richtungen“). Einerseits werden diese Richtungen genauer untersucht, andererseits ergeben sich Sätze, die die Nichtkonkavität bzw. Konvexität der Eichfläche (also einer beliebigen Fläche im n -dimensionalen affinen Raum) gewährleisten, wenn die Fläche in jedem Punkt gewisse ziemlich schwache Konvexitätseigenschaften hat. Weitere Arbeiten in dieser Richtung sind geplant. Cohn-Vossen (Köln).

Sz. Nagy, Julius v.: Über die ebenen Kurven von Maximalindex und von Maximalklassenindex. Jber. dtsch. Math.-Ver. **41**, 82—87 (1931).

Der Verf. hat in früheren Arbeiten die ebenen Kurven untersucht, welche vom Maximalklassenindex sind (vgl. unten); ferner hat er die ebenen Kurven vom Maximalindex (vgl. unten) betrachtet [Math. Ann. **89**, 32—75 (1923); **90**, 152—153 (1924); **100**, 164—178, 179—187 (1928); **103**, 502—515 (1930)]. In der vorliegenden Abhandlung werden nun alle ebenen Kurven G bestimmt, welche vom Maximalindex und gleichzeitig vom Maximalklassenindex sind. Ergebnis: Jede nur aus einem Zug bestehende Kurve G ist entweder ein Oval oder eine Kurve von 3. Ordnung und 3. Klasse (mit einer Spitze und einem Wendepunkt). Jede mehrzügige Kurve G ist Summe aus zwei oder aus drei Ovalen; je zwei der ovalen Züge von G berühren sich in je zwei Punkten von außen. — Unter einer Kurve bzw. unter einem einzelnen Zug einer Kurve versteht man dabei ein (in der projektiven Ebene gelegenes) eindeutiges stetiges Bild des Kreises, welches Summe aus endlich vielen Konvexbogen ist und überall eine Tangente besitzt, die (folglich) stetig ist. Die Ordnung bzw. der Index der Kurve ist die größte bzw. die kleinste Anzahl von Punkten der Kurve, welche auf einer Geraden liegen. Die Klasse bzw. der Klassenindex ist die größte bzw. kleinste Anzahl von Tangenten der Kurve, welche einen Punkt gemeinsam haben. Der Maximalindex (bzw. Maximalklassenindex) einer Kurve der Ordnung (bzw. Klasse) n ist daher $n - 2$. Der Beweis wird geführt auf Grund der früher (a. a. O.) vom Verf. aufgestellten Sätze über Kurven vom Maximal- bzw. vom Maximalklassenindex. Haupt (Erlangen).

Kaufmann, Boris: Parameterkurven ohne Halbtangenten. Sitzgsber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. Abh. **6**, 1—9 (1931).

Es werden ebene einfache Bogen (d. h. ein-eindeutige, stetige Streckenbilder), welche in keinem Punkt weder eine vordere noch eine hintere Halbtangente besitzen, in übersichtlicher Weise konstruiert, nämlich durch unbegrenzte

Fortsetzung des folgenden Verfahrens: a) Einem vorgelegten gleichschenkligen Dreieck ABC mit einem Basiswinkel β wird ein einfacher, C enthaltender Bogen \mathfrak{B} eingeschrieben, dessen Endpunkte A und B sind. Dabei ist \mathfrak{B} Summe von abzählbar vielen Strecken, deren jede den einen Endpunkt A'_ν (bzw. B'_ν) auf der Basis AB , den anderen Endpunkt A''_ν (bzw. B''_ν) auf CA (bzw. CB) liegen hat und wobei jede Strecke mit der Basis den gleichen Winkel $\pi/2 - \vartheta$ bildet ($0 < \beta < \vartheta < \pi/6$). Der Streckenzug wird also an AB sozusagen immer unter dem nämlichen Winkel „reflektiert“. b) Über $A'_\nu A'_\nu$ und $A'_\nu A''_{\nu+1}$ als Basen errichtet man neue gleichschenklige Dreiecke mit dem Basiswinkel β , welche ganz dem abgeschlossenen Dreieck $A''_\nu A'_\nu A''_{\nu+1}$ angehören (entsprechend für $B'_\nu B'_\nu B''_{\nu+1}$). c) Auf die neuen (ganz zum abgeschlossenen ursprünglichen Dreieck ABC gehörigen) gleichschenkligen Dreiecke wendet man a) an, alsdann b) usw. Der Beweis für die Nichtexistenz von Halbtangenten ergibt sich einfach. *Haupt.*

Mechanik.

Krall, G.: Qualehe complemento alla teoria degli invarianti adiabatici secondo T. Levi-Civita. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 852—856 (1931).

Die Hamiltonsche Funktion F_0 eines kanonischen Systems mit n Freiheitsgraden soll außer den p_i und den q_i auch sich adiabatisch verändernde Parameter a , nicht aber die Zeit explizite enthalten, und es seien für $a = \text{konst.}$ außer $F_0 = c_0$ noch m Integrale $F_r(p, q) = c_r$ bekannt, die miteinander in Involution liegen und außerdem die Eigenschaft haben, daß m Gleichungen unter diesen $m + 1$ Beziehungen in bezug auf m Impulse stets identisch auflösbar sind. Man kann dann z. B. die Energie als eine Funktion des Ortes in einem Phasenraum auffassen, der durch die Mannigfaltigkeit von $n - m$ Impulsen und der n Koordinaten gebildet wird. Bestimmt nun die Energiegleichung in diesem reduzierten Phasenraum eine geschlossene Fläche und wird das durch diese Fläche bestimmte Innengebiet durch die Integralkurven auf eine quasi-ergodische Weise besetzt, so ist das Volumen des umschlossenen Gebietes eine adiab. Inv. im Sinne von Levi-Civita; dabei kann die Rolle von F_0 irgendein F_r übernehmen, und die beiden Grenzfälle $m = 0$ (Gibbs) bzw. $m = n - 1$ (Stäckelsche Separationssysteme) müssen nicht ausgeschlossen werden. — Diese Betrachtungsweise bleibt nun ohne weiteres bestehen, wenn die F_r nicht mehr Integrale, sondern nur invariante Relationen (im Sinne von Poincaré) darstellen. Die sich dabei ergebenden adiabatisch invarianten Volumina bezeichnet der Verf. als relative adiab. Inv., zur Unterscheidung von den Levi-Civitaschen, die als absolute adiab. Inv. zu bezeichnen sind. Eine wesentliche Anwendungsmöglichkeit dieser rel. adiab. Inv. wird durch den Umstand gesichert, daß, wenn S irgendeine Lösung der Ham.-Jac. Differentialgleichung bedeutet, die miteinander stets in Involution liegenden, durch $p_i = \partial S / \partial q_i$ gelieferten invarianten Relationen auch dann adiab. inv. Volumina $J_i = \int p_i dq_i$ ergeben, wenn S keine vollständige Lösung der Ham.-Jac. Differentialgleichung ist, also keine abs. adiab. Inv. ergeben muß. Merkwürdigerweise bleibt ein bekannter Zusammenhang zwischen der Summe der J_i einerseits und dem Wirkungsintegral andererseits auch im verallgemeinerten Falle bestehen. — Explizite Anwendungen auf spezielle Fälle werden in Aussicht gestellt.

Wintner (Baltimore).

Gugino, Eduardo: Il teorema del massimo effetto e sue più notevoli deduzioni. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 241—264 (1931).

Consider a system S of particles P_i (masses m_i) subjected to given applied forces F_i and to given constraints (frictionless and independent of the time, but permitted to be anholonomic and even unilateral); compare with this a virtual system S^* formed from S by the superposition of additional constraints. At time t_0 let the P_i of both systems be at rest at the points M_i , and at time $t_0 + \tau$ let those of S and S^* occupy positions N_i and V_i respectively. The natural and virtual "kinetic-dynamic effects" are then defined as:

$$E_n = \sum m_i \overline{M_i N_i}^2, \quad E = \sum m_i \overline{M_i V_i}^2.$$

The author's restricted (to motions from rest) theorem then states that, for sufficiently small τ , $E_n > E$ for all virtual systems S^* . The proof involves expansion in τ of the displacements and application of the generalized principle of virtual work. The relation of this theorem to the Gaussian principle of least constraint is discussed and the theorem is also applied to demonstrate that Bertrand's theorem for impulsive forces can be extended to continuous forces for our restricted case, i. e. the kinetic energies of S and S^* satisfy the relation $T(t_0 + \tau) > T^*(t_0 + \tau)$. The general theorem ($E_n > E$), valid for non-vanishing initial velocities and for constraints involving the time, requires that S^* be formed from S by the superposition of "shunting constraints" (legami a raccordo), these being defined as reversible and as admitting the initial velocities \mathbf{v}_i . The generalized definition of E is:

$$E = \sum m_i (\mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^* \tau^2)^2 + \tau^2 \sum (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i^*) \cdot (\mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^* \tau^2)$$

and E_n is obtained from E on substituting for the virtual accelerations \mathbf{a}_i^* the natural \mathbf{a}_i . A calculation of the first and second variations gives the proof. The author finally discusses the relations of the theorem to his restricted theorem and to the Hertzan principle of least curvature, the Gaussian principle, and Appell's related theorem.

F. W. Doermann (New York).

Gugino, Eduardo: *Sull'attrito dinamico pei sistemi materiali di punti vincolati.* Rend. Circ. mat. Palermo **55**, 265—275 (1931).

Painlevé and other writers have defined the force of friction \mathbf{W}_i acting upon the particle P_i of a system essentially as the difference $\mathbf{R}_i - \mathbf{V}_i$ of the total reaction of the rough constraints and the reaction of the same constraints supposed smooth, the configuration and motion of the system and the applied force \mathbf{F}_i remaining the same. In the present paper the author proposes to write $\mathbf{W}'_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{V}'_i$, defining \mathbf{V}'_i as the reaction of the constraints supposed smooth, the applied force \mathbf{F}_i being changed to $\mathbf{F}_i + \mathbf{W}'_i$. He then shows that in general the components of \mathbf{W}'_i may be found from the equations of (in general anholonomic) constraint as linear expressions in the parameters defining the nature of the friction. Finally he shows that the components of $\mathbf{W}'_i - \mathbf{W}_i$ are expressible linearly in the components of all the \mathbf{W}'_i .

F. W. Doermann (New York).

Depreux: *Sur la résistance de l'air à l'arrière des projectiles.* C. r. Acad. Sci. Paris **193**, 439—440 (1931).

Der Verf. zeigt, daß die von Gabeault (Sur la résistance de l'air aux vitesses ballistiques., vgl. ds. Zbl. **2**, 73) abgeleiteten Erscheinungen für den Fall, daß die Geschwindigkeit gleich der einfachen bzw. gleich der doppelten Schallgeschwindigkeit von derselben Art sind. Einerseits kann die Zirkulation sich nicht mit einer Geschwindigkeit ausbreiten, die größer als die Schallgeschwindigkeit ist. Andererseits kann die Geschwindigkeit der in Rotation befindlichen Flüssigkeitsteilchen nicht über die Schallgeschwindigkeit hinausgehen, ohne eine Unstetigkeit hervorzurufen.

J. J. Sommer (München).

Adrian, W.: *Zeitfragen mechanischer Schwingungen.* Z. angew. Math. u. Mech. **11**, 382—387 (1931).

● **Beghin, H., et G. Julia:** *Exercices de mécanique.* Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1931.

Blaise, H.: *Zusammengesetzte Gelenkgetriebe. Beitrag zur Systematik und Synthese des Aufbaues.* Z. Ver. dtsh. Ing. **1931 II**, 1223—1227.

Neuerdings werden die Kurventriebe, die zur Erzeugung eines vorgegebenen Bewegungsverlaufes dienen (der auch oft Stillstände aufweist), durch zusammengesetzte Gelenkgetriebe oder Gelenkvierecke ersetzt (bei denen die Stillstände durch „Rasten“, d. h. angenäherte Stillstände erreicht werden, s. a. die Arbeiten von Alt und von Hoecken, Z. Ver. dtsh. Ing. **1930**, S. 139, 1416, 1457). Der Verf. unterscheidet im

systematischen Teil selbständige Gelenkgetriebe und unselbständige (d. h. solche, die nicht zwangsläufig sind), und außerdem ihrem Zweck entsprechend solche, die der Umformung (z. B. drehende Bewegung in schwingende) oder der Übersetzung (z. B. langsam in schnell) oder der Verlagerung (Übertragung einer Bewegung an eine andere Stelle) dienen, und schließlich noch unter geordnete (jedes Gelenkviereck des Mechanismus hat zwei feste Punkte) und entsprechend übergeordnete Getriebe. Im synthetischen Teil wird an einem untergeordneten aus drei Gelenkvierecken zusammengesetzten Gelenktrieb gezeigt, wie ein vorgeschriebenes Bewegungsgesetz verwirklicht werden kann. Außerdem wird an einem weiteren Beispiel die Möglichkeit der „Treibungsverformung“ eines Schwingentriebes erläutert und die Möglichkeiten der „Verdoppelung, Verdreifachung und Vervierfachung“ einer Bewegung durch diese Gelenktriebe geschildert.

Meyer zur Capellen (Koblenz, Mosel).

Blaise, H.: Zusammengesetzte Gelenkgetriebe. Beitrag zur Systematik und Synthese des Aufbaues. II. Z. Ver. deutsch. Ing. 1931 II, 1303—1309.

In Fortsetzung der früheren Arbeit werden Grundgesichtspunkte für die Synthese von zusammengesetzten Koppelgetrieben gegeben, wobei besonders die rein bewegungsgeometrische Betrachtungsweise gegenüber der evtl. rechnerischen hervorgehoben wird (was wohl nur in bedingtem Maße gelten kann). Für die Fortleitung einer Bewegung eines Kurbeltriebes auf ein zweites Getriebe sind wichtig die Formen der „Leitung“, d. h. der Koppelkurven. Diese Formen werden weniger auf Grund der bekannten Gesetze der Koppelkurven (Polkurven, Übergangskurve, Ballsche Kurve usw.) gegeben, sondern aus praktischen Erwägungen auf Grund eines „polar“ angeordneten Schaubildes: Die Punkte der Koppelebene werden geordnet nach den vom zweiten Gelenk der Koppel ausgehenden Strahlen, ohne daß die Folgerungen daraus irgendwie bewiesen werden. (Die Bedeutung der Polkurve wird nur flüchtig, die der Burmesterschen Punkte usw. gar nicht genannt.) — Weiter wird die Leitungs- und Treibungsverlagerung mit Hilfe des Storchschnabels geschildert, ebenso das zweifach untergeordnete Koppelgetriebe für schwingende Treibung mit einigen Anwendungsbeispielen, die Rasten liefern. — Zum Schluß werden die zusammengesetzten Koppelgetriebe für drehende Treibung (die bisher kaum erörtert sind und z. B. eine Pilgerschrittbewegung ermöglichen), insbesondere die Anwendungsmöglichkeit von Doppelkurbeln behandelt, die mannigfaltige Bewegungsformen, vor allem auch Treibungsvervielfachung erlauben. — Im Vordergrund der Arbeit steht das Ziel, ohne tiefer gehende geometrische Beziehungen schnell einen Überblick über die praktische Verwendungsmöglichkeit zu bekommen, was jedoch immer ein gewisses Probieren bleibt, aber durch diese Arbeit sehr systematisiert ist.

Meyer zur Capellen (Koblenz, Mosel).

Zindler, Konrad: Eine räumliche Geradföhrung. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. IIa 140, 399—402 (1931)

Es wird ein aus elf gelenkig miteinander verbundenen Stäben bestehendes räumliches Stabsystem angegeben, welches zur Erzeugung einer Geraden dienen kann. Im Gegensatz zu den bekannten ebenen Geradföhrungen setzt dieser Mechanismus nicht die Existenz einer Ebene voraus.

Prager (Göttingen).

Elastizitätstheorie und Verwandtes:

Higuchi, Seiichi: On the forced vibration of an elastic rod. Sci. Rep. Tôhoku Univ. (Math. etc.) 20, 399—432 (1931).

Die Bewegung eines elastischen Stabes, der am einen Ende eine Einzelmasse von endlicher Ausdehnung trägt, dessen anderes Ende durch eine Einspannung so gehalten wird, daß die Stabtangente dauernd horizontal gerichtet bleibt, und an dessen gehaltenem Ende eine abklingende äußere periodische Kraft senkrecht zur Stabachse angreift, wird in allgemeiner Form behandelt unter der Voraussetzung, daß zu Beginn der Bewegung der Stab ruht und undeformiert ist und daß das Stabmaterial einer der Deformationsgeschwindigkeit proportionalen inneren Dämpfung unterworfen ist.

Durch numerische und graphische Auswertung von Sonderfällen wird der Einfluß der kennzeichnenden Parameter des Systems auf die Bewegung klargelegt.

K. Hohenemser (Göttingen).

Sokolnikoff, I. S.: On a solution of Laplace's equation with an application to the torsion problem for a polygon with reentrant angles. Trans. amer. math. Soc. **33**, 719 bis 732 (1931).

Es wird eine allgemeine Methode der Auflösung der Laplaceschen Gl. mit gewissen, längs der Seiten eines geradlinigen Polygons vorgeschriebenen Randbedingungen und deren Anwendung auf das Torsionsproblem eines Stabes mit unendlichem T-Querschnitt gegeben. Weder dieser noch auch der endliche T-Querschnitt sind bisher in der Literatur exakt behandelt worden. Die Methode ist anwendbar für alle Bereiche, die auf die obere Halbebene derart abgebildet werden können, daß die Grenze des Bereiches in die ganze reelle Achse übergeht. Die von F. Kötter 1908 für einen L-Querschnitt angegebene Methode eignet sich nicht für Bereiche, die mehr als einen einspringenden Winkel haben, und bzw. der Arbeit von E. Trefftz 1912 über denselben Gegenstand sagt der Verf., daß ihr Erfolg durch die besondere Form der Randbedingungen des Torsionsproblems bedingt ist und daß sie die schließliche Lösung des Problems „von einem graphischen Schema abhängig macht“. Der Verf. bildet das Innere des gegebenen Polygons durch die Schwartz-Christoffelsche Formel auf die obere Halbebene ab; die Funktion, die dies leistet, sei

$$z \equiv z(\zeta) = g_1(\xi, \eta) + i g_2(\xi, \eta)$$

und ihr Wert an der Grenze

$$\Phi^* = f(x, y) = f(g_1(\xi, \eta), g_2(\xi, \eta))$$

ist tatsächlich eine Funktion von ξ allein. Aus diesem Φ^* ergibt sich der Wert in einem inneren Punkte durch ein Poissonsches Integral. Für den T-Querschnitt wird diese Abbildung durch elementare Funktionen geleistet. Zur Befriedigung der Randbedingungen dient ein Kunstgriff. Es wird eingeführt

$$\Phi_1 = \frac{x^2 - y^2}{2} + yd, (\Delta \Phi_1 = 0) \quad \text{und} \quad \Phi_2^* = y^2 - yd,$$

dann ist

$$\Phi^* = \Phi_1 + \Phi_2^* = \frac{x^2 + y^2}{2};$$

wenn Φ_2^* gefunden ist, ist auch $\Phi^* = \Phi_1 + \Phi_2^*$ bestimmt. Der Vorteil liegt in der Vereinfachung der auftretenden Integrale. Die Lösung selbst wird durch eine unendliche Reihe dargestellt. Die Schubspannungslinien im Querschnitt werden aufgezeichnet.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Bonvicini, Dante: Osservazioni sul problema della stabilità dell'equilibrio elastico. (R. Scuola d'Ingegn., Bologna.) Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. ecc. **66**, 186 bis 194 (1931).

Der Verf. beschäftigt sich im ersten Teil der Arbeit mit der Frage, wie sich der Kirchhoffsche Eindeutigkeitssatz für elastische Gleichgewichtsprobleme mit dem Vorhandensein instabiler Gleichgewichtszustände verträgt. Die Ausführungen schließen sich im wesentlichen den v. Misesschen an [Z. angew. Math. u. Mech. **3**, 406 (1923)]. Im zweiten Teil der Arbeit wird hingewiesen auf einen vermeintlichen Fehler bei der üblichen Art der Anwendung des Brianschen Energiekriteriums der Knicksicherheit und erklärt, wieso man trotzdem das richtige Ergebnis erhält.

Prager (Göttingen).

Kaplan, C.: On the strain-energy function for isotropic bodies. (California Inst. of Technol., Pasadena.) Physic. Rev., II. s. **38**, 1020—1029 (1931).

Die Formänderungsarbeit in einem isotropen Körper wird als Summe homogener Polynome vom ersten, zweiten und dritten Grade in den Formänderungskomponenten angesetzt. Aus den Isotropiebedingungen folgt, daß in dieser Entwicklung für die Formänderungsarbeit nur vier elastische Konstanten auftreten können. Unter Heranziehung von Überlegungen, welche von F. D. Murnaghan stammen (Proc. nat. Acad.

Sci. U. S. A. 14, 890 (1928)], werden aus dem Ausdruck für die Formänderungsarbeit Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen hergeleitet, welche mit Versuchen von P. W. Bridgman [Proc. Amer. Acad. 58, 203 (1923)] über das Verhalten von Natrium unter hydrostatischem Druck in guter Übereinstimmung stehen.

Prager (Göttingen).

Zoja, R.: Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare di altezza variabile. II. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 692 bis 694 (1931).

Zoja, R.: Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare di dimensioni comunque variabili. III. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 760—762 (1931).

Im Anschluß an eine frühere Mitteilung (l. c. S. 520—523; dies. Zbl. 2, 63) wird die Spannungsverteilung untersucht in einem an einen Ende eingespannten, am anderen Ende belasteten Stabe, dessen rechteckiger Querschnitt veränderliche Breite (Mitteilung II) oder veränderliche Breite und Höhe hat (Mitteilung III). Die angegebenen Spannungsverteilungen erfüllen die Gleichgewichtsbedingungen und die Randbedingungen der Aufgabe; ob sie auch die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie befriedigen, wird nicht untersucht.

Prager (Göttingen).

Sen, Bibhutibhusan: On the stresses in an elastic sphere having certain discontinuous distributions of normal pressures on the surface. Bull. Calcutta math. Soc. 23, 67—76 (1931).

The object of the paper is to find the stresses in a sphere that is pressed between two parallel planes or that is pressed normally by circular hoops clamped round its surface. The general solution of the equations of equilibrium of a spherical body with given surface tractions expressible in spherical harmonics have been known for a long time. In this paper simplifications result from the symmetrical deformation produced by the applied forces. The series employed to represent the surface tractions necessary to equilibrate the point or line distribution of concentrated forces fail to converge at points other than those at which the forces are applied as well as at these points. The principal results depend upon the use of these divergent series in the expression of boundary conditions. The paper contains no investigation to justify the use of these series.

H. W. March (Madison, Wisconsin).

Federhofer, Karl: Neue Beiträge zur Berechnung der Kipplasten gerader Stäbe. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. IIa 140, 237—270 (1931).

Der erste Teil behandelt das Problem des Kippens eines einseitig eingespannten Stabes mit einer nach dem Ansatz $(1 - x/l)^n$ veränderlichen Höhe, der eine nach einem ähnlichen Ansatz verteilte Belastung trägt; unter Kippen versteht man die Ausbiegung aus der Ebene der größten Biegesteifigkeit. Die Integration der Kippgleichung wird in den behandelten Fällen durch Besselsche Funktionen geleistet und die kleinsten Werte der Kipplast als kleinste Wurzeln gewisser Besselscher Funktionen erhalten. Der zweite Teil bringt die ziffermäßige Beurteilung des Einflusses der vor dem Eintritt des Kippens entstehenden Hauptbiegung des Stabes auf die Größe der Kipplast. Hierbei werden behandelt: 1. der Stab mit konstantem Querschnitt, am Ende mit einer Einzellast belastet; 2. der in der Mitte belastete Stab, dessen Endquerschnitte durch Parallelführungen am Kippen gehindert werden; 3. der einseitig eingespannte Stab mit konstantem Querschnitt und gleichmäßig verteilter Belastung; in 4. werden diese Betrachtungen für Stäbe mit veränderlichem Querschnitt nach einer Näherungsrechnung erledigt, die darauf beruht, daß die Kipplast nicht für die ursprünglich gerade Form des Trägers berechnet wird, sondern für jene Form, die der Stab durch die Hauptbiegung erfährt und die eine ebene Kurve bildet. Durch geeignete Wahl der Veränderlichkeit der Stabhöhe wird erreicht, daß diese Kurve ein Kreis wird. Die kleinste Kipplast wird sodann nach einem Näherungsverfahren von Karas und Timoshenko bestimmt, die dem von Rayleigh-Ritz für die Eigenwerte der ent-

sprechenden Schwingungsprobleme entwickelten analog ist. Als Näherungslösungen werden zweckmäßig die einfachsten mit den Grenzbedingungen verträglichen Polynome gewählt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Hydro- und Aeromechanik:

Raethjen, P.: Stationäre Strömung unter dem Einfluß der Schwere in stabil geschichteten Flüssigkeiten und Gasen, insbesondere in der Atmosphäre. *Meteor. Z.* 48, 288—306 (1931).

When air stratified in a stable manner flows over an obstacle such as a mountain, the introduction of the hydrostatic pressure into the theorem of V. Bjerknes on the generation of vortex motion indicates that the vortex acceleration B depends only on gravity and the horizontal gradient of the logarithm of the absolute temperature T , in fact

$$B = \frac{g}{T} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (1)$$

Denoting the vorticity in two dimensional flow by C we have

$$C = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -w_0 \Delta h \quad (\text{for an incompressible fluid}), \quad (2)$$

where h is the normalised stream-function and w_0 is the velocity of the undisturbed stream far from the obstacle. Moreover, if dl is an element of arc of a stream-line and w the velocity of flow the rate of change of C is given by the equation $\dot{C} = w \frac{\partial C}{\partial l}$.

In an incompressible fluid $\dot{C} = B$ and equation (1) can be integrated along a stream-line. A similar integration is possible in air if we assume that the density depends only on the potential temperature (which does not vary along a stream-line) and on the hydrostatic pressure. Indeed, if $C = 0$ in the undisturbed field of flow and air is treated as almost incompressible, $C = -\lambda w_0 (y - h)$ where $\lambda = g\theta/w_0^2 T$ and θ is the vertical gradient of the potential temperature. Substitution in (2) gives $\Delta h = \lambda (y - h)$, where Δ is the two dimensional Laplacian operator. If $h = h_0 + h_1$, where h_0 is the stream-function for a homogeneous fluid flowing past the obstacle, h_1 must be chosen so as to satisfy $\Delta h_1 = \lambda (y - h_1 - h_0)$ and vanish on the boundary. A function satisfying these requirements may sometimes be formed from a sequence of functions h'_1, h'_2, \dots which satisfy respectively the equations $\Delta h'_1 = \lambda (y - h_0)$, $\Delta h'_2 = \lambda (y - h_0 - h'_1)$, \dots but this method fails when the ground rises from a horizontal plane to a second horizontal plane or consists of two horizontal planes separated by a mountain. A method of treating such cases is therefore explained. Discontinuous motion is also considered and special attention is given to the flow of a stably stratified fluid when there is a rise of an inversion layer on the windward side of a mountain and a fall of the inversion layer on the lee side.

H. Bateman (Pasadena).

Burgers, J. M.: On the motion of a fluid under the action of external forces (with an application to the theory of the lifting surface). (*La Haye, Sitzg. v. 1.—6. IX. 1930.*) Verh. 5. internat. Kongr. Luftf. 1, 497—508 (1931).

Im Anschluß an die Oseenschen Arbeiten und unter Beschränkung auf die sog. erste Oseensche Näherung entwickelt der Verf. Formeln für die Störungsgeschwindigkeiten, die in idealer Flüssigkeit mit einer Parallelströmung als Hauptströmung unter der Einwirkung äußerer Kräfte entstehen. Die erhaltenen Formeln werden u. a. benutzt, um die Abwärtsgeschwindigkeit am Tragflügel bei gegebener Zirkulationsverteilung zu berechnen.

J. Lotz (Göttingen).

Poncin, Henri: Sur le mouvement d'un fluide autour d'une cavitation. *C. r. Acad. Sci. Paris* 193, 481—482 (1931).

Die in dies. Zbl. 1, 366 referierte erste Note enthielt neben dem allgemeinen Problem einer zweidimensionalen Blase (Hohlraum), die in einer idealen Flüssigkeit bei Bewegung eines Gefäßes relativ zum Gefäß in Ruhe bleibt, Einzelausführungen über

Blasen am Rande des Gefäßes. Hier wird nun näher auf den Fall einer Blase im Innern der Flüssigkeit eingegangen.

A. Busemann (Dresden).

Picone, Mauro: *Sul moto dei gravi in un mezzo resistente.* Boll. Un. mat. ital. 10, 150—167 (1931).

Im Anschluß an die Arbeit von Scorza-Dragoni (Zbl. 2, 214) und an eine frühere Arbeit (Boll. Un. mat. ital. 9 (1930)] diskutiert der Verf. einige Spezialfälle. Die Anfangsgeschwindigkeit hat 1. eine Horizontalkomponente (schiefer Wurf) 2. keine Horizontalkomponente (Wurf nach oben bzw. unten). Der Widerstand des Mediums hängt nur von der Geschwindigkeit v ab. [Annahmen: $F(v) = av + b$ und $F(v) = av^n$ (insbesondere $n = 2$)] $F(v)$ erfülle in jedem endlichen Intervall (Nullpunkt ausgeschlossen) die Lipschitzsche Bedingung. 2. Es sei: $\lim_{v \rightarrow \infty} F(v) > g$ und 3. be-

sitze die Gl. $F(v) - g = 0$ nur eine Wurzel, wobei die Gl. für die Endgeschwindigkeit des Geschosses w gilt ($g = \text{Erdbeschleunigung}$). Verf. untersucht insbesondere, wann die Geschoßgeschwindigkeit ein Minimum besitzt. Es ergibt sich das folgende Kriterium: Jede Geschoßbahn besitzt ein solches Geschwindigkeitsminimum, wenn $F(v)$ die obigen Bedingungen erfüllt und der Quotient $F(v)/v^2$ rechts von der Endgeschwindigkeit $v = w$ nicht abnimmt:

$$\frac{F(v)}{v^2} \geq \frac{F(w)}{w^2} \quad \text{für} \quad w \leq v \leq w + \delta \quad (\delta > 0).$$

J. J. Sommer (München).

Tomotika, Susumu: *On the vortex motion behind an elliptic cylinder in a stream and some allied problems.* (Phys. Inst., Imp. Univ., Tokyo.) Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 13, 191—200 (1931).

Verf. betrachtet die ebene Potentialströmung um einen elliptischen Zylinder unter der Annahme, daß hinter dem Zylinder zwei symmetrisch gelegene Wirbel von entgegengesetzt gleicher Stärke vorhanden sind. Es wird die Strömungsfunktion gefunden und mit deren Hilfe die Geschwindigkeit der Wirbel berechnet. Zur Bestimmung der Gleichgewichtslage des Wirbelpaares hat man die genannte Geschwindigkeit gleich Null zu setzen; dadurch wird auch die Wirbelstärke mitbestimmt. Als geometrischen Ort der Gleichgewichtslagen bekommt man eine gewisse Kurve mit geradlinigen Asymptoten. Ferner wird die Stabilität der Bewegung untersucht. Es erweist sich, daß das Wirbelsystem gegenüber antisymmetrischen Störungen instabil ist; es ist bestrebt, sich vom Zylinder unter Zunahme der Wirbelstärke zu entfernen. Zum Schluß wird die Druckverteilung an der Oberfläche des Zylinders diskutiert.

V. Fock (Leningrad).

Sanuki, Matao, and Hidetosi Arakawa: *Mechanism of the vortex motion behind an elliptic cylinder.* Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 13, 201—207 (1931).

Die von S. Tomotika (vgl. vorst. Referat) betrachtete Aufgabe wird durch konforme Abbildung des Äußeren einer Ellipse auf das Äußere des Kreises auf den von L. Föppl (Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-physik. Kl. 1913) behandelten Fall des Kreiszyklinders zurückgeführt. Unter der Annahme, daß die Bewegung des Wirbelpaares bekannt ist, wird der Widerstand des Zylinders als zeitliche Ableitung des gesamten Impulses der Flüssigkeit berechnet.

V. Fock (Leningrad).

Goldstein, S.: *On the stability of superposed streams of fluids of different densities.* Proc. roy. Soc. Lond. A 132, 524—548 (1931).

Goldsteins Arbeit ist eine Verallgemeinerung der Rayleighschen Untersuchungen über die Stabilität von Strömungen mittels der Methode der kleinen Schwingungen, angewandt auf geschichtete Strömungen verschiedener Dichte. Mehrere Fälle verschiedener Dichteschichtung werden hinsichtlich ihres Einflusses auf die Stabilität unter folgenden allgemeinen Annahmen untersucht: Unendlich ausgedehnte Flüssigkeit, Geschwindigkeit und Dichte konst. in jeder Horizontalebene; Reibung und Kompressibilität werden vernachlässigt und die Störungen in Form progressiver

Wellen in Richtung der Grundströmung angesetzt. Die Stabilitätskriterien können dann durch Beziehungen zwischen den dimensionslosen Größen $\alpha = 2\pi H/\lambda$ und $n = g(\Delta \varrho/\bar{\varrho}H)^2$ ausgedrückt werden, worin bedeuten: H = Dicke der betrachteten Schicht (Übergangsschicht) mit der Dichte $\bar{\varrho}$, die eingelagert ist zwischen Deck- und Bodenschicht, deren Dichtedifferenz $= \Delta \varrho$ und deren Geschwindigkeitsdifferenz $= \Delta u$ sei, λ = Wellenlänge der Störung und g = Schwerkbeschleunigung. Für folgende Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung: $\bar{\varrho}$ = arith. Mittel der Dichten der Begrenzungsschichten, $\frac{\partial u}{\partial z}$ = konst. in jeder Schicht, aber unstetig an den Trennungsf lächen,

wobei u jedoch daselbst stetig, tritt z. B. Instabilität auf, wenn n zwischen $\alpha/(1 \pm e^{-\alpha}) - 1$ liegt; diese Instabilitätszone wird vom Verf. auch im α, n -Diagramm veranschaulicht. Die Unterteilung der Übergangsschicht in 3 bzw. 5 Teilschichten (wieder mit spezieller Dichteverteilung) liefert im α, n -Diagramm 2 bzw. 3 Instabilitätszonen, wobei in jedem Fall der niedrigste kritische n -Wert bei demselben α -Wert eintritt. — Den Abschluß der Arbeit bilden allgemeine Untersuchungen über die Stabilität von Flüssigkeiten mit kontinuierlich variierender Dichte. H. Ertel (Berlin).

Stewart, G. W.: Problems suggested by an uncertainty principle in acoustics. *J. acoust. Soc. Amer.* 2, 325—329 (1931).

When a signal of nominal frequency ν_1 lasting over a time Δt is analysed by Fourier's theorem the width of the central peak with vertex at ν_1 is found to be $1/\Delta t$. It is reasonable then to suppose that no instrument can measure the frequency ν of the signal with greater accuracy than the variation of ν under the principal peak, i. e. $\Delta \nu = 1/\Delta t$ or $\Delta \nu \cdot \Delta t = 1$. This is regarded as an uncertainty principle in acoustics analogous to Heisenberg's uncertainty principle $\Delta p \cdot \Delta q \sim h$, which leads to $\Delta t \cdot \Delta \nu \sim 1$. The author regrets the lack of experiments determining frequency in which the duration of the signal is varied systematically. Records of the vibrato of the human voice show changes of frequency. If such variations in frequency occur seven times a second and the uncertainty principle is applicable, the ear will be unable to detect a change $\Delta \nu$ of seven cycles a second. The principle may be of importance in the determination of the minimum perceptible difference in the frequencies of two successive tones for a knowledge of the duration of the signal is then needed. Reference is made to some of Knudsen's observations. Bateman (Pasadena).

Sircar, Hrishikesh: Sound waves due to the vibration of a spheroid in the presence of a rigid and fixed spheroidal obstacle. *Bull. Calcutta math. Soc.* 23, 85—100 (1931).

For a single spheroid of small eccentricity vibrating in the direction of its axis of revolution (the z -axis) the velocity potential Φ may be expressed in the form

$$\Phi = \sum R_n(kr)^n f_n(kr) P_n(\mu) e^{ikct}$$

where the constants R_n are given by the boundary condition that on the spheroid $r = a[1 + \varepsilon P_n(\mu)]$ the ratio of the normal derivative of Φ to the normal derivative of z is a constant u multiplied by e^{ikct} . When use is made of the series of Adams for the product of two Legendre polynomials $P_m(\mu) P_s(\mu)$ a set of linear equations is obtained for the coefficients R_n and these equations may be solved with the aid of absolutely convergent infinite determinants of von Koch's type. These results are then used to find the scattering of the primary waves by a fixed spheroid having the same axis of revolution as the vibrating spheroid which produces the primary waves. The simple solutions occurring in the expression for Φ are first expanded in a series of simple solutions associated with the centre of the fixed spheroid. The potential Φ , of the waves diverging from the fixed spheroid is then expanded in a series of appropriate simple solutions and the coefficients are found from another set of linear equations which can be solved by means of absolutely convergent infinite determinants of von Koch's type. The original plan was to use the method of successive reflections but to the order of approximation adopted a second reflection was found to be unnecessary.

Bateman (Pasadena).

Klassische Theorie der Elektrizität.

Bohr, Niels: Maxwell and modern theoretical physics. *Nature* (Lond.) 1931 II, 691—692.

Blondel, André: Remarques sur la subrationalisation des unités pratiques. *Rev. gén. Électr.* 30, 491—494 (1931).

Bewley, L. V.: Traveling waves on transmission systems. *Trans. amer. Inst. electr. Eng.* 50, 532—550 u. 557—560 (1931).

Ursprung, Form, Dämpfung und Reflexion von Wanderwellen in einem Mehrfachleistersystem werden rechnerisch behandelt, und es wird eine graphische Darstellung der Vorgänge bei wiederholten Reflexionen gegeben. Cauer (Göttingen).

Pomey, J.-B.: Propagation du courant télégraphique sur un câble. *Rev. gén. Électr.* 30, 317—319 (1931).

Auf den ersten Blick läßt sich die Methode des Fourierintegrals auf das vorliegende Problem nicht anwenden, falls am Anfang des Kabels eine konstant gehaltene Spannung dauernd wirkt. Denn die zugehörigen Integrale würden wegen Nichtverschwindens des Integranden im Unendlichen divergieren. Verf. wendet einen von H. Poincaré stammenden Kunstgriff an, dem zufolge man die Spannung verschwinden läßt für alle Zeiten später als der Zeitpunkt t , in dem der Strom gefragt wird. Die Ausarbeitung dieser Bemerkung führt auf bekannte Ausdrücke für Strom und Spannung im Kabel. Dem Ref. sei die Bemerkung gestattet, daß Poincarés Kunstgriff, der vom Verf. durch eine physikalische Überlegung gerechtfertigt wird, auch unmittelbar aus dem Verlauf der Charakteristiken, welche zur in Betracht kommenden hyperbolischen partiellen Differentialgleichung gehören, folgt. M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Hecht, H.: Eine analytische Theorie des Telephons und ihre Bedeutung für das Experiment. (*Labor. d. Electroacoustic G. m. b. H., Kiel.*) *Elektr. Nachr.-Techn.* 8, 392—404 (1931).

Die Betrachtungen des Verf. unterscheiden sich von den Theorien des Telephons (bzw. Lautsprechers) von H. Poincaré, A. E. Kennelly und H. Lichte dadurch, daß als Ersatzkreis für das elektromagnetische Antriebssystem eine Parallelschaltung von Widerstand und Selbstinduktion (bzw. Kapazität) angenommen wird, statt der üblichen Serienschaltung. Hierdurch gestaltet sich die Theorie bei Vernachlässigung von Streuung und Widerstand der Spule im Antriebssystem besonders einfach; es werden Ausdrücke für Wirkungsgrad und Phasenwinkel abgeleitet. Es folgt eine Berechnung des Wirkungsgrades bei Berücksichtigung von Streuung und Widerstand, sowie eine Betrachtung über die zweckmäßigste Anwendung der Theorie auf die experimentelle Untersuchung des Telephons. Dem Ref. sei erlaubt, auf die Arbeiten N. W. Mc. Lachlans [*Philosophic. Mag.* 7, 1011 (1929); 11, 1 (1931)] und Ph. le Corbeillers (*Annales P. T. T. Jan.* 1929) hinzuweisen (beide vom Verf. nicht erwähnt). In den zuerst genannten Arbeiten findet man Formeln für eine Parallelschaltung als Ersatzkreis für das Telefon (bzw. Lautsprecher). Die Theorie der letztgenannten Arbeit steht an Übersichtlichkeit nicht gegen die des Verf. zurück. M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Adam, Eberhard: Über den Scheinwiderstand von Spulenleitungen mit einer teilweise oder zur Gänze unwirksamen Spule. *Elektr. Nachr.-Techn.* 8, 404—417 (1931).

Der Ort einer fehlerhaften Spule in einer pupinisierten Übertragungsleitung wird nach K. Küpfmüller ermittelt, indem die Frequenzcharakteristik der Wellenimpedanz am Leitungsanfang gemessen wird. Der Theorie fällt demnach die Aufgabe zu, diesen Frequenzgang der Impedanz zu berechnen. Verf. gibt eine strenge Behandlung dieser Aufgabe im Falle, daß die Leitung nach der fehlerhaften Spule durch den Scheinwiderstand einer gleichartigen, unendlich langen, fehlerlosen Leitung abgeschlossen ist. Die Ergebnisse werden numerisch auf den Sonderfall einer verlustfreien Spulenleitung erster Art mit abweichender Induktivität der Spule eines Gliedes angewandt. Reeller und imaginärer Teil des Scheinwiderstandes werden diskutiert, und es wird gezeigt, wie

aus ihrem Frequenzverlauf ein sicherer Schluß auf den Ort der fehlerhaften Spule zu ziehen ist. Das Verfahren wird in einigen praktischen Fällen durchgerechnet und erläutert.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Pidduck, F. B.: *Electrical notes. IV. Alternating currents in networks.* Quart. J. Math., Oxford ser. 2, 174—176 (1931).

Bei einer Wheatstoneschen Brückenschaltung, bestehend aus 6 einfachen leitenden zusammengeschweißten Drähten, ist es nach der vereinfachten Elektrizitätstheorie, wie sie in der Elektrotechnik üblich ist, nicht unmittelbar klar, welche Potentiale und Impedanzen den verschiedenen Brückenästen zugeschrieben werden müssen. Verf. diskutiert diese Verhältnisse ausgehend von den Maxwellschen Gleichungen und gelangt zu einer Beziehung, bei der die Schaltungsgrößen mit Hilfe des mittleren geometrischen Abstandes von Maxwell berechnet werden können, solange die Schweißstellen und gebogenen Drahtteile kurz sind im Vergleich zur Gesamtdrahtlänge.

Strutt.

Ataka, H.: *A relation between continued fractions and hyperbolic functions.* Philosophic. Mag., VII. s. 12, 551—553 (1931).

Beziehungen, die zwischen Zähler und Nenner des Kettenbruches $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}$ und den Hyperbelfunktionen eines ganzzahligen Vielfachen von ϑ vermöge der Substitution $x = 2 \sin \vartheta$ bestehen, werden durch Diskussion eines elektrischen Kettenleiters abgeleitet.

Cauer (Göttingen).

Dwight, Herbert Bristol: *The calculation of resistances to ground and of capacitance.* (Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge [U. S. A.]) J. of Math. 10, 50—74 (1931).

Die Berechnung von Erdungswiderständen ist äquivalent mit der Ermittlung der Kapazitäten gegebener Leiterformen. Diese wird u. a. für einen Kreiszylinder, dessen Länge groß gegenüber seinem Durchmesser ist, für einen Quader, dessen eine Seite groß gegenüber den beiden anderen Seiten und dessen zweite Seite groß gegenüber der dritten Seite ist, für eine dünne rechteckige und für eine dünne kreisförmige Platte mitgeteilt. Die Kapazitäten werden näherungsweise unter der Annahme gleichmäßiger Flächendichte der Ladung als Quotient der Gesamtladung und des durchschnittlichen Potentials berechnet. Der Fehler wird nicht formelmäßig, sondern an numerischen Beispielen abgeschätzt.

Cauer (Göttingen).

Klassische Optik.

Noether, F.: *Über die Verteilung des Energiestroms bei der Totalreflexion.* Ann. Physik, V. F. 11, 141—146 (1931).

Bei der Totalreflexion verläuft im zweiten, optisch dünneren Medium eine inhomogene Welle, deren Auftreten insofern physikalische Schwierigkeiten bereitet, als bei einer ebenen Welle der Energieübertritt vom ersten ins zweite Medium nach der Theorie im zeitlichen Mittel verschwindet. In einer Arbeit aus dem Jahre 1929 [Ann. Physik (5) 3, 433 (1929)] hat J. Picht das Problem diskutiert und gezeigt, daß (bei einem wenig geöffneten Bündel) ein Energieübertritt vom ersten ins zweite Medium auch bei der Totalreflexion stattfindet. Der übertretende Energiestrom verteilt sich im Zeitmittel in der Grenzfläche nach einer Kurve, die in den geometrischen Grenzen des Bündels ein Maximum hat und nach beiden Seiten rasch mit einigen Schwankungen abfällt. Die Energie selbst strömt jedoch in noch feiner unterteilten Grenzen vom ersten ins zweite Medium und zurück. Um den Charakter dieses Strömungsvorganges besser übersehen zu können, hat der Verf. auf die Grenzflächen zwei bzw. drei ebene Wellen im Gebiet der Totalreflexion auftreten lassen, deren Richtungen sich nur wenig voneinander unterscheiden. (Bei Picht ist im Anschluß an P. Debye das einfallende sphärische Bündel durch Überlagerung von ebenen Wellen mit innerhalb eines (kleinen) Winkels stetig verteilter Fortpflanzungsrichtung ersetzt.) Bei der Überlagerung zweier Wellen ergibt sich bereits die oben-

erwähnte feine Unterteilung der hin und her strömenden Energie, während sich der seitliche Intensitätsabfall erst bei Überlagerung von drei oder mehr Wellen bemerkbar macht. Es überlagern sich gewissermaßen hier Fresnelsche und Fraunhofersche Beugung, wobei die letzte rascher veränderlich ist als die erste, während man in der Optik sonst an das Umgekehrte gewöhnt ist. *Picht* (Berlin-Lankwitz).

Försterling, K.: Über die Ausbreitung des Lichtes in inhomogenen Medien. *Ann. Physik*, V. F. 11, 1—39 (1931).

Behandelt wird folgendes Problem: eine homogene ebene Welle mit der Wellennormalen in der $x y$ -Ebene fällt aus einem unendlich ausgedehnten homogenen Medium für $z < z_1$ auf eine Schicht $z_1 < 0 < z_2$ an die sich für $z > z_2$ wieder ein unendlich ausgedehntes homogenes Medium anschließt. Die Permeabilität ist durchweg 1 gesetzt. Über die Zwischenschicht wird zunächst angenommen, daß die dielektrische Konstante ε in der Umgebung von $z = 0$ durch eine Reihe $\varepsilon(z) = \varepsilon_m z^m + \varepsilon_{m+1} z^{m+1} + \dots$ mit $m > 0$ dargestellt wird. Es ergibt sich, daß der Wellenzug an dieser Schicht bei Abwesenheit von Absorption total reflektiert wird, dagegen bei Annahme einer sehr schwachen Absorption der Zwischenschicht (komplexes ε) nicht total. Zweitens wird über die Zwischenschicht angenommen, daß die in ihr vorhandene Inhomogenität von ε klein gegenüber dem übrigens durchweg konstanten Wert von ε sein soll: $\varepsilon = \varepsilon_0 + \eta(z)$ mit $|\eta| \ll \varepsilon_0$. Für diesen Fall werden einige besondere Formen des Verlaufs von $\varepsilon(z)$ behandelt, u. a. der Fall sprunghafter Änderung, der auf Fresnels Formeln führt. Ist die Dicke der Zwischenschicht genügend klein, so tritt keine Reflexion auf. Drittens endlich wird für den Sonderfall $\varepsilon = (\varepsilon_0 + z)^k$, wobei k eine ganze Zahl, eine strenge Lösung der Differentialgleichungen angegeben, was eine Erweiterung des von R. Gans betrachteten Falles $k = 1$ darstellt. Die Reflexion an der Schicht ist i. a. keine totale; die reflektierte Amplitude wird für spezielle Fälle berechnet. Ref. möchte auf die Arbeiten von D. R. Hartree und G. J. Elias hinweisen, wo ähnliche Probleme behandelt werden (vgl. dies. Zbl. 1, 87f.). *M. J. O. Strutt*.

Uhler, H. S.: On the theory of plane transmission gratings. *J. opt. Soc. Amer.* 21, 410—415 (1931).

Fällt ein Bündel auf ein Gitter mit der Gitterkonstante δ unter dem Einfallswinkel ι ein, so sind die beiden n ten Beugungsspektren um Winkel β und β' abgelenkt, für die folgende Gleichungen gelten:

$$n\lambda/2\delta = \sin \frac{1}{2}\beta' \cos(\frac{1}{2}\beta' + \iota); \quad n\lambda/2\delta = \sin \frac{1}{2}\beta \cos(\frac{1}{2}\beta - \iota).$$

Hier liegt das durch β gekennzeichnete Spektrum auf der Seite des Lots. Diese Gleichungen können zur Bestimmung von $n\lambda/\delta$ dienen. Der Verf. empfiehlt, nicht ι genau zu messen oder zu Null zu machen, sondern für zwei Maxima gleicher Ordnung auf beiden Seiten die Ablenkungen β und β' zu beobachten. Elimination von ι aus den Gleichungen gibt:

$$n\lambda/\delta = \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(\beta' + \beta), \quad \text{wo } \varphi \text{ durch:} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta' - \beta)}{2 \sin \frac{1}{2}\beta' \sin \frac{1}{2}\beta}$$

bestimmt ist. Uhler verweist darauf, daß β' für wachsende ι beständig wächst, β dagegen ein Minimum hat. Er untersucht dann, um wieviel $n\lambda/\delta$ fehlerhaft wird, wenn die Winkelmessungen kleine Fehler haben, und kommt zu einem günstigen Ergebnis. Am zweckmäßigsten erscheint ihm die Beobachtung in der Nähe des Minimums von β .

H. Boegehold (Jena).

Hudec, Erich: Die Abbildung beim Fernsehen. *Elektr. Nachr. Techn.* 8, 229—245 (1931).

Es werden die für das Fernsehen wesentlichen technischen Einzelheiten allgemein und an Hand spezieller Beispiele besprochen und gezeigt, unter welchen Bedingungen die Abbildung als brauchbar bezeichnet werden kann. *Picht* (Berlin-Lankwitz).

Vitali, Goffredo: Sul calcolo di una lente. Atti. Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 767—769 (1931).

Der Verf. leitet die schon 1637 von R. Descartes bewiesene Tatsache neu ab, daß ein parallel auf eine Fläche einfallendes Bündel dann genau in einem Punkte vereinigt wird, wenn die Grenzfläche durch Umdrehung eines bestimmten Kegelschnittes entstanden ist, und zwar wird dieser eine Ellipse, wenn auf seiten des Parallelstrahlenbündels das niedere Brechungsverhältnis ist, andernfalls eine Hyperbel. Verf. kommt auch wieder zu einigen von Descartes im 8. Kapitel der Dioptrik erwähnten Linsenformen.

Hans Boegehold (Jena).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Green, George: On some problems in the conduction of heat. (*Phys. Dep., Univ., Glasgow.*) *Philosophic. Mag.*, VII. s. 12, Suppl.-Nr. 233—255 (1931).

Verf. behandelt zunächst die Darstellung von Wärmequellen. Es werden punktförmige Quellen und auf einer Kugeloberfläche ausgebreitete Quellen, und zwar sowohl periodische wie momentane, mit Hilfe Besselscher Funktionen dargestellt. Den Fall linienhaft und auf einer Zylinderfläche verteilter Quellen hat Verf. in einer früheren Arbeit (*Philosophic. Mag.* 1928) in ähnlicher Weise behandelt. Durch Superposition (und Reflexion) solcher Quellenlösungen werden sodann Randwertaufgaben gelöst, bei denen es sich darum handelt, im Innern eines Bereichs eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung zu finden, wenn sich in einem Punkt des Bereichs eine Wärmequelle gegebener Stärke befindet und am Rande gewisse homogene Bedingungen vorgeschrieben sind. In dieser Weise werden behandelt das Innere einer Kugel, eines Zylinders, des von einer Ebene und des von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Raumstückes. Schließlich wird die benutzte Methode noch auf einige Probleme der Potentialtheorie und der Wellengleichung angewandt.

E. Rothe (Breslau).

Schofield, F. H.: The heat loss from a cylinder embedded in an insulating wall. (*Phys. Dep., Nat. Phys. Labor., Teddington, Middlesex.*) *Philosophic. Mag.*, VII. s. 12, Suppl.-Nr. 329—349 (1931).

Es wird die Aufgabe behandelt, den stationären Wärmefluß zu bestimmen, der entsteht, wenn ein unendlich langer Kreiszylinder mit isothermer Oberfläche in eine unendlich lange Mauer von rechteckigem Querschnitt und ebenfalls isothermer Oberfläche eingebettet ist. Zur Lösung wird die Methode der konformen Abbildung verwendet. Dabei wird der Kreisquerschnitt des Zylinders ersetzt durch eine solche Kurve, die einerseits nicht zu sehr vom Kreise abweicht, andererseits bei Annahme einer geeigneten Quelle als Isotherme auftritt. Die Ergebnisse der rechnerischen Behandlung werden zum Teil mit dem Resultat einer graphischen Näherung verglichen.

E. Rothe.

Milne, E. A.: Notes on thermodynamics. III. The relation of osmotic pressure to concentration for dilute solutions. *Quart. J. Math., Oxford ser. 2*, 203—206 (1931).

The paper gives a proof by the methods of Gibbs of the result obtained by Rayleigh. The author considers a system consisting of the pure solvent (pressure p) in contact with solution (p') across a semi-permeable membrane. The solution is in contact with its own vapour (p'') across the liquid-gas interface. This gas mixture is in contact with pure solute (gas, p''') across another semi-permeable membrane. The partial densities of solvent and solute in the different phases are respectively

$$\varrho_1, \varrho'_1, \varrho''_1, 0; \quad 0, \varrho'_2, \varrho''_2, \varrho'''_2;$$

and the osmotic pressure of the solution is $P = p' - p$. The method of Gibbs' partial potentials is then applied to the system, and it is shown that

$$dP = \left(\frac{\varrho'_1}{\varrho_1} - 1 \right) dp + \frac{\varrho'_2}{\varrho'''_2} dp''' \quad (1)$$

It is then shown that the usual physical assumptions reduce to

$$\varrho'_1 = \varrho_1; \quad \varrho'_2/\varrho'''_2 = k = \text{constant}; \quad \varrho''_2 = \varrho'''_2$$

when used in (1) these relations lead to

$$P/\varrho'_2 = p'''/\varrho'''_2, \quad (2)$$

so that the ratio of osmotic pressure to partial density for the dissolved substance is equal to the ratio of pressure to density for the pure substance in the form of a gas at the same temperature. If the perfect gas law holds, (2) reduces to

$$P/\varrho'_2 = (R/m) T,$$

where R = gas constant; m = molecular weight; T = temperature. This is Rayleigh's result. (I. u. II. vgl. dies. Zbl. 1, 373.) *W. H. McCrea* (Edinburgh).

Hausen, H.: Eine neue Zustandsgleichung des Wasserdampfes. *Forsch. Ing. wes.* B 2, 319—326 (1931).

Die Zustandsgleichung wird aus der Abhängigkeit der spezifischen Wärme bei konstantem Druck, c_p von Druck und Temperatur abgeleitet. Für den Grenzfall kleinen Druckes läßt sich die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme c_{p_0} molekulartheoretisch berechnen. Die Differenz $c_p - c_{p_0}$ ist aus experimentellen Daten bekannt. Durch eine Interpolationsformel wird diese Differenz als Funktion der reduzierten Temperatur T/T_k und des reduzierten Druckes P/P_k dargestellt:

$$c_p - c_{p_0} = 0,5311 \left(\frac{P}{P_k} \right) \left(\frac{T_k}{T} \right)^{3,5} + 1,191 \left(\frac{P}{P_k} \right)^3 \left(\frac{T_k}{T} \right)^{18} + 8,3054 \left(\frac{P}{P_k} \right)^{12} \left(\frac{T_k}{T} \right)^{60}.$$

Um das Volumen v als Funktion von Druck und Temperatur darzustellen, wird die thermodynamische Beziehung angewendet: $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_P = -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial c_p}{\partial P} \right)_T$. Analoge Differentialgleichungen führen auf die Ausdrücke für den Wärmehalt i und für die Entropie s . Die bei den Integrationen auftretenden willkürlichen Temperaturfunktionen werden so bestimmt, daß $\left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_P = c_p$ bzw. $\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{c_p}{T} \right)$. Zwei bei der Integration auftretende Funktionen des Druckes werden empirisch aus der Druckabhängigkeit des Volumens und des Wärmehaltes bestimmt. Obwohl die experimentelle Grundlage der neuen Zustandsgleichung des Wasserdampfes sich nur bis zu Drucken von 120 at erstreckt, gestattet die Gleichung Extrapolationen bis zu Drucken über 200 at; nur an einzelnen Stellen mußte die Extrapolation durch schrittweise rechnerische Integration der thermodynamischen Differentialgleichungen ergänzt werden. *Eisenschütz* (Berlin).

Wheeler, T. S.: On the general theory of boiling-point rules. *Philosophic. Mag.*, VII. s. 12, 685—689 (1931).

Es werden die Beziehungen studiert, die die Temperaturen gleichen Dampfdrucks (Siedepunkte) zweier Flüssigkeiten verknüpfen, wenn für den Dampfdruck als Funktion der Temperatur Formeln verschiedener Art angewandt werden. Die Betrachtungen werden dadurch verallgemeinert, daß an Stelle der Gleichheit der Dampfdrucke der beiden Flüssigkeiten ($p_1 = p_2$) ein beliebiger funktioneller Zusammenhang zwischen ihnen [$p_1 = F(p_2)$] vorgeschrieben wird. In diesem Falle ist die Beziehung zwischen den absoluten Temperaturen T_1 und T_2 , bei denen die Flüssigkeiten die im vorgeschriebenen Zusammenhang stehenden Dampfdrucke p_1 bzw. p_2 besitzen, linear, falls gilt

$$\varphi(F(p_2)) = k_1 + k_2 \varphi(p_2).$$

Hier ist φ definiert durch die allgemeine Dampfdruck-Temperatur-Gleichung $\varphi(p) = f(T)$. *H. Ulich* (Rostock).

Relativitätstheorie.

● **Levinson, Horace C., and Ernest Bloomfield Zeisler:** The law of gravitation in relativity. 2. edit. Chicago: Univ. of Chicago press 1931. 127 S. geb. \$ 3.50.

7 Kapitel: I Elements of the Tensor Theory; II Algebra of Tensors; III Differential Properties; IV The Tensors $R_{\rho\mu\nu\lambda}$ and $G_{\mu\nu}$ ($= g^{\lambda\lambda} R_{\rho\mu\nu\lambda}$); V Fundamental Tensors;

VI Laws of Gravitation; VII Application to the Solar Field. — Kapitel I—IV bringen — von der üblichen Darstellungsweise nicht sehr abweichend — die Theorie der Differentialformen. Der Begriff der Übertragung wird nicht benutzt. Kapitel V bildet den Übergang zu dem, das eigentliche Hauptthema behandelnden Kapitel VI und bringt im wesentlichen die Theorie der sog. Fundamentaltensoren einer quadratischen Differentialform $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ unter Beschränkung auf solche Fundamentaltensoren, die keine höheren Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ als die zweiten enthalten und diese linear. Dann folgt Kapitel VI, das nach den möglichen Gravitationsgesetzen in materiefreien Gebieten des Raumes fragt unter folgenden Postulaten: 1. Die Metrik sei im Riemannschen Sinne definiert durch die quadratische Differentialform $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$; 2. das Gravitationsgesetz sei allgemein kovariant; 3. es möge bestehen aus einem System von Differentialgleichungen für die $g_{\mu\nu}$ allein; 4. in diesem System sollen höchstens Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ zweiter Ordnung auftauchen; 5. die Ableitungen zweiter Ordnung sollen linear eingehen. Hinzukommen werden noch drei (unbewiesene aber plausible) Annahmen. — Aus den angegebenen Postulaten folgen nun 4 verschiedene Gravitationsgesetze, aus welchen man weitere als Linearkombinationen herleiten kann. Kapitel VII gibt die statisch-kugelsymmetrische Lösung des speziellen Gesetzes

$$R_{\varrho\mu\nu\sigma} + \frac{1}{2} G_{\varrho\nu} g_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} g_{\varrho\sigma} + \frac{1}{2} G_{\mu\sigma} g_{\varrho\nu} = 0.$$

In einem Anhang werden Ergänzungen zu den vorhergehenden Ausführungen gegeben. Methoden der Variationsrechnung werden in dem ganzen Buche (auffallenderweise) nicht benutzt. *Heckmann* (Göttingen).

Levi-Civita, T.: Rifrazione e riflessione nella relatività generale. Atti pontif. Accad. Sci. 84, 332—352 (1931).

Verf. zeigt, daß die üblichen Gesetze der Reflexion und Refraktion an beliebig bewegten Körpern alle zu erhalten sind auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie, die Lichtstrahlen aufgefaßt als geodätische Nulllinien der Mannigfaltigkeit und die Grenzfläche der Spiegelung oder Brechung behandelnd als eine Singularitätsfläche.

Lanczos (Lafayette).

Whittaker, E. T.: On the definition of distance in curved space, and the displacement of the spectral lines of distant sources. Proc. roy. Soc. Lond. A 133, 93—105 (1931).

The "spatial distance" of an astronomical object is in practice taken to be proportional to the square root of the ratio of its absolute brightness to its apparent brightness. The present paper seeks to find what quantity this measures if space is curved, and the method is to consider a pencil of null-geodesics (light tracks) issuing from the star A and observed by an observer B . The cross section of this pencil in B 's instantaneous three-dimensional space is then proportional to the square of the spatial distance AB . The analytical treatment is given for the de Sitter world. It is shown that the metric can be written

$$\frac{ds^2}{R^2} = \frac{du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2 - u^2} + \frac{(udu - xdx - ydy - zdz)^2}{(1 + x^2 + y^2 + z^2 - u^2)^2} \quad (1)$$

and that then the geodesics are the straight lines

$$x = au + a' \quad y = bu + b' \quad z = cu + c'$$

where x, y, z, u are mapped in an Euclidean space, and the "absolute" is

$$u^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1. \quad (2)$$

The paths of light pulses are then the straight lines which touch the absolute. The author shows that without loss in generality the coordinate system may be chosen so that the world-line of B is

$$x = x_0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (x_0 = \text{const}) \quad (3)$$

while A , when it emits the light observed by B , is at

$$u = u_1, \quad x = x_1, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad (4)$$

He then expresses the fact that AB is a tangent to (2). Then he finds where a neighbouring tangent through A will cut the instantaneous space of B i.e. the hyperplane orthogonal to the line (3). This allows him to find the area of the cross-section in this instantaneous space of a pencil of such tangents. From the definition of the spatial distance A he can now find a value for it in terms of x_0, x_1, u_1 . The specialisation introduced by the coordinatem system can finally be removed by expressing this value in terms of invariants. The result is

$$A = \frac{R \sin \varrho}{\cos(\sigma + \varrho)}$$

for the distance from $A(u_1, x_1, y_1, z_1)$ to an observer B on the line (x_0, y_0, z_0) , where

$$\sin \sigma = \frac{u_1}{(1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (-\pi/2 \leq \sigma \leq \pi/2)$$

$$\cos \varrho = \frac{1 + x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1}{(1 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{\frac{1}{2}}(1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (0 \leq \varrho \leq \pi)$$

and σ, ϱ , and consequently A , are invariants. Further the proper time τ_0 when B receives the light pulse from A is given by

$$\tanh \frac{\tau_0}{R} = \sin(\sigma + \varrho).$$

If A has the world line $x = x_1, y = y_1, z = z_1$, and B the world line $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, then A is first visible to B when $A = R$. It will decrease to the minimum $A = R \sin \varrho$, and then increase, tending to infinity. Thus de Sitter's world will appear to be spatially infinite. The Doppler effect is shown to be given by

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda} = \frac{\cos \sigma}{\cos(\sigma + \varrho)} - 1. \quad (\lambda = \text{wave length})$$

Finally the formulae are shown to reduce to those of special relativity when $R \rightarrow \infty$.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Quantentheorie.

● **Bohr, Niels: Atomtheorie und Naturbeschreibung. Vier Aufsätze mit einer einleitenden Übersicht.** Berlin: Julius Springer 1931. 77 S. RM. 5.60.

In der vorliegenden Broschüre faßt Bohr vier Vorträge aus den Jahren 1925 bis 1930 zusammen, die in der deutlichsten Weise die stufenweise Entwicklung derjenigen physikalischen Gedanken erkennen lassen, mit deren Hilfe B. die Grundlagen der modernen Atomtheorie geklärt hat und die sich unter seinen Händen zu einer Art Philosophie der Physik entwickelt haben. Die mathematisch-formale Entwicklung der modernen Quantentheorie steht in B.s Vorträgen im Hintergrund. Dagegen werden die entscheidenden begrifflichen Neuerungen, zu denen die Atomphysik Anlaß gab, aufs gründlichste diskutiert. Ferner wird in einem „Addendum“ kurz darauf hingewiesen, daß auch für die Stellung der lebenden Organismen in unserem Weltbild das Bohrsche Prinzip der Komplementarität eine neue Situation schafft.

Als das Wesentliche an dem Bohrschen Buche sieht der Referent die allgemeine Einstellung gegenüber den Problemen der Physik an, die sich von der vieler anderer Physiker erheblich unterscheidet und aus der daher vieles zu lernen ist: B. lehnt grundsätzlich ab, mit irgendwelchen mathematisch-formalen Wünschen an die Naturbeschreibung heranzutreten. Weder die raum-zeitliche Feldgeometrie der Relativitätstheorie noch die Transformationstheorie der Quantenmechanik wird als Basis für die Naturbeschreibung betrachtet. Vielmehr werden die einzelnen Disziplinen der modernen Physik durch den Verzicht auf gewisse Begriffe der klassischen Physik charakterisiert, und es wird genau diskutiert, inwieweit dieser Verzicht ein irrationales Element in der Naturbeschreibung notwendig mit sich bringt. Es kann kein Zweifel bestehen, daß auch in der künftigen Entwicklung der Kernphysik ein solcher Verzicht die entschei-

dende Rolle spielen wird und daß daher die Bohrschen Gedankengänge die Voraussetzung für ein weiteres Vordringen auf diesem Gebiete sein werden. *Heisenberg.*

Heisenberg, W.: Die Rolle der Unbestimmtheitsrelationen in der modernen Physik. *Mh. f. Math.* **38**, 365—372 (1931).

Die Bedeutung der Unbestimmtheitsrelation wird ohne Benützung des mathematischen Apparates in elementarer Weise dargelegt. — Da kleinere Gebilde als Elektronen und Protonen nicht existieren, muß in einer korrekten Physik die Frage: „Was geschieht in Bereichen, die kleiner sind als diese Gebilde?“ sinnlos werden. Die Quantentheorie erfüllt diese Forderung. Solange dagegen die Grundbausteine anschaulich, d. h. nach Analogie der Großgebilde aufgefaßt werden (klassische Theorie), ist ein Abschluß der Welt nach unten nicht zu erzielen. Eine korrekte Atomtheorie muß unanschaulich sein.

E. Zilsel (Wien).

● **Condon, E. U., and P. M. Morse: Quantum mechanics.** London: McGraw-Hill publ. Co., Ltd. 1931. 15/—.

Willstätter, Margarete: Betrachtungen über das Wentzel-Brillouinsche Näherungsverfahren in der Wellenmechanik, insbesondere beim Wasserstoffmolekülion. *Ann. Physik*, V. F. **10**, 873—887 (1931).

Das Problem des Wasserstoffmolekülions (Bewegung einer Partikel um zwei feste Zentren) wird in der üblichen Weise in elliptischen Koordinaten separiert. Nach der Wentzel-Brillouinschen Vorschrift geht man zu Differentialgleichungen vom Riccatischen Typ über und setzt die Lösung als Potenzreihe nach \hbar an. Die wellenmechanische Eindeutigkeitsbedingung liefert vollständige elliptische Integrale, die von drei Parametern (Eigenwert, Separationsparameter, Kernabstand) abhängen und gleich festen Werten sein müssen. Das am nächsten liegende Lösungsverfahren ist nun, durch Elimination des Separationsparameters eine Beziehung zwischen Energie und Kernabstand punktweise (numerisch) herzustellen. Dabei stößt man auf die Schwierigkeit, daß man bei der kontinuierlichen Variation der drei Parameter über einen gewissen Wert (nämlich Null) des Separationsparameters μ nicht hinauskommt. Durch Vergleich mit den Lösungen von Teller und Wilson, die auf anderem Wege gefunden wurden, zeigt sich, daß das Wentzelsche Verfahren an der Stelle $\mu = 0$ nicht mehr genügend konvergiert. Für den Fall verschwindenden Kernabstands wird das auch direkt verifiziert. Mit einem schon von Wentzel benutzten Kunstgriff kann man in diesem Fall die Potenzreihe nach \hbar zum Abbrechen bringen, also die Lösung streng angeben; man muß dazu in der Riccatischen Differentialgleichung die Glieder mit \hbar geschickt aufteilen. Für kleinen Kernabstand wird in der vorliegenden Arbeit die Aufteilung angewendet, die sich für verschwindenden Kernabstand bewährt hat; es ergeben sich Werte, die mit den Rechnungen von Teller gut übereinstimmen. Für sehr große Kernabstände bekommt man ohne den Kunstgriff gute Werte. Für das Gebiet mittlerer Kernabstände versagen die in der Arbeit angewandten Methoden.

K. Bechert (München).

Inglis, David R.: Energy relations in complex spectra. *Physic. Rev.*, II. s. **38**, 862—872 (1931).

Der erste Teil der Arbeit behandelt die Frage: Gegeben ein Atom, für dessen Außen-elektronen in nullter Näherung ($j\ j$)-Kopplung gilt (d. h. unabhängige Elektronen); wie liegen die Energieniveaus, wenn als Störung die elektrostatische Wechselwirkung der Elektronen berücksichtigt wird? Dazu muß man sich die Eigenfunktionen nullter Näherung bei ($j\ j$)-Kopplung verschaffen [schon von Bartlett angegeben, *Physic. Rev.* **35**, 230 (1930)] und die Matrixelemente der Störungsfunktion ausrechnen. Die Integration über den Winkelanteil läßt sich, teilweise unter Benutzung Slaterscher Resultate, ausführen. Inglis gibt eine Tabelle der Wechselwirkungsintegrale je zweier Elektronen, durch die die radialen Anteile der Integrale ausgedrückt. Damit können die Wechselwirkungsintegrale für gegebene Konfigurationen mehrerer Elektronen berech-

net werden. Der zweite Teil der Arbeit ist eine erweiterte Darstellung der von Goudsmit angewandten Methode, die Energieniveaus eines Atoms bei mittlerer Kopplung [zwischen (*j j*)- und Russell-Saunders-Kopplung] zu finden. Der Gedanke ist: Man kennt die Lage der Energieniveaus in den zwei Grenzfällen [(*j j*)- und Russell-Saunders-Kopplung], man kennt außerdem die allgemeine Form der Säkulargleichung des Problems und weiß, wie ihre Glieder von den betrachteten Wechselwirkungen (elektrostatische und Spin-Bahn-Wechselwirkung) abhängen; bei äquivalenten Elektronen bekommt man so (für nicht zu viele Elektronen) hinreichend viele Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten der Säkulargleichung. Als Beispiel wird der Fall der Konfiguration p^3 behandelt und mit den empirischen Resultaten bei Bi I, Sb I, As I verglichen. Theorie und Experiment stimmen gut überein. *Bechert* (München).

Goldstein, L.: *Sur la distribution de l'intensité dans les bandes continues du spectre de H₂.* C. r. Acad. Sci. Paris **193**, 485–488 (1931).

Es werden die Intensitäten im kontinuierlichen Spektrum des H₂ unter folgenden vereinfachenden Annahmen berechnet: 1. Für den oberen Zustand ist die Eigenfunktion der Kernschwingungen die von Morse angegebene. 2. Für den unteren Zustand wird die Eigenfunktion e^{ipr} gesetzt. (Es wird also vernachlässigt, daß die Kerne mit einer bestimmten kinetischen Energie sich nicht beliebig nahe kommen können.) 3. Es wird angenommen, daß das elektrische Moment des Elektronenüberganges von dem Kernabstand unabhängig ist. Das Ergebnis der Rechnung ist, daß die Übergangswahrscheinlichkeit für $p = 0$ maximal ist. Die kontinuierlichen Wasserstoffbanden müssen also nach rot abgeschattiert sein.

E. Teller (Göttingen).

Ittmann, G. P.: *Zur Theorie der Störungen in Bandenspektren.* Z. Physik **71**, 616–626 (1931).

Die Theorie der Störungen in Bandenspektren, die bisher nur für Singulettbanden und für den Koppelungsfall b) in Multiplettbanden (d. h. für gänzliche Entkoppelung des Elektronenspins im Anfangs- und Endzustand) entwickelt worden war, wird hier auf Dublettbanden bei beliebiger Koppelung des Elektronenspins erweitert. Das zugrunde gelegte Verfahren ist ein Störungsverfahren, wobei vom Koppelungsfall a) als nullter Näherung ausgegangen wird. Die Rechnung wird für die Störungen zwischen einem $^2\Sigma$ -Zustand und einem $^2\Pi$ -Zustand im einzelnen durchgeführt, da solche Störungen theoretisch besonders lehrreich sind und dafür auch experimentelles Material zu einer eingehenden Prüfung vorhanden ist. Es ergibt sich zunächst, solange man nur die Wechselwirkungsterme der Σ -Niveaus untereinander und der Π -Niveaus untereinander berücksichtigt, die Ordnung der Σ -Niveaus dem Koppelungsfall b) entsprechend und die Verzerrung des Π -Dubletts durch Rotation. Die Wechselwirkung zwischen beiden Arten von Niveaus liefert dann die eigentlichen Störungen. Die beiden Teilniveaus $J = K \pm \frac{1}{2}$ des $^2\Sigma$ -Zustandes, die zu jedem Wert der Rotationsquantenzahl K gehören, erleiden dabei Störungen bei gänzlich verschiedenen Werten von J . Auch die Intensitäten in der Nähe einer Störung werden untersucht, wobei sich zeigt, daß die gestörten Linien an Intensität einbüßen. Dafür treten bei den betreffenden Werten der Rotationsquantenzahl „überschüssige“ Linien auf, die diesen Intensitätsverlust kompensieren. Die erhaltenen Resultate werden auf Störungen in den violetten und roten Cyanbanden angewandt und eine sehr befriedigende Übereinstimmung erhalten. Der Verf. macht darauf aufmerksam, daß auch die Störungen in den Banden von N₂⁺ und SiN von derselben Art sind.

R. de L. Kronig (Groningen).

Dennison, David M.: *The infrared spectra of polyatomic molecules. Pt. I.* Rev. of mod. Phys. **3**, 280–345 (1931).

Es werden die allgemeinen Züge der ultraroten Spektren mehratomiger Moleküle besprochen. Im ersten Kapitel werden die Schwingungen behandelt. Dabei wird erst die Annahme gemacht, daß die Amplituden klein sind, und folglich die Kräfte harmonisch und die elektrischen Momente proportional den Verrückungen werden. Es wird unter dieser Annahme die Separation in Normalkoordinaten durchgeführt und die

Auswahlregel abgeleitet. Dann wird die Annahme der kleinen Amplituden fallen gelassen und diskutiert, welche Auswahlregeln aus den Symmetrieeigenschaften allein folgen. Im zweiten Kapitel wird die Rotation besprochen. Erst kommt die Theorie des symmetrischen Kreisels dran. Dann wird der asymmetrische Kresel nach der Matrixmethode von O. Klein behandelt. Es wird gezeigt, daß gewisse Auswahlregeln, welche im Falle des symmetrischen Kreisels bestehen, bei dem asymmetrischen Kresel erhalten bleiben. Es wird Lage und Intensität der Linien bis $j = 4$ angegeben. Im Kapitel 3 wird die Frage des Intensitätswechsels behandelt. Im ersten und dritten Kapitel werden folgende Typen ausführlicher behandelt: YX_2 (linear und gewinkelt), Y_2X_2 (linear), YX_3 und ZYX_3 . Der Typus YX_4 (veg. Tetraeder) wird nur kurz erwähnt.

E. Teller (Göttingen).

Eucken, A.: Beiträge zur Kenntnis der Molekularkräfte. III. Über die Ableitung des van der Waalschen Ausdrucks a/v^2 . Z. physik. Chem. Erg.-Bd., Bodenstein-Festbd. 432—436 (1931).

Der Verf. ist mit der einfachen statistischen Ableitung der van der Waalschen Glieder unzufrieden und gibt eine andere, die auf der Behauptung beruht, daß das mittlere Geschwindigkeitsquadrat von in großer Entfernung sich bewegenden Molekülen von $\frac{3}{2} \frac{kT}{m}$ verschieden ist. Der Widerspruch dieser Annahme mit der aus der gewöhnlichen Statistik folgenden Unabhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung von der Raumverteilung wird nicht diskutiert.

L. Landau (Leningrad).

Wagner, Carl: Theorie der geordneten Mischphasen. II. (Diffusionsvorgänge.) (Phys.-Chem. Abt., Chem. Inst., Univ. Jena.) Z. physik. Chem. Erg.-Bd., Bodenstein-Festbd. 177—186 (1931).

Es wird der Diffusionsvorgang in einer festen Lösung in der Nähe einer chemischen Verbindung untersucht. Der Verf. geht dabei von der plausiblen Annahme aus, daß für die Diffusion nur die Atome in Zwischengitterplätzen und die Leerstellen des Gitters maßgebend sind, dagegen der gegenseitige Platzwechsel von Atomen als beliebig unwahrscheinlich zu betrachten ist. Wie in einer Arbeit von C. Wagner und W. Schottky [Z. physik. Chem. B 11, 163 (1930)] diskutiert wird, zerfallen die festen Lösungen in der Nähe einer chemischen Verbindung in zwei verschiedene Klassen: 1. der Typus I/II, wo die Atome der einen Komponente B wesentlich kleiner sind als die der anderen A , so daß bei Überschuß von B Zwischengitterplätze besetzt werden, bei Überschuß von A dagegen Leerstellen im Teilgitter von B entstehen; 2. der Typus III/III, wo die wechselseitige Substitution der Atome der beiden Komponenten die Hauptrolle spielt. Im ersten Falle ist die Zahl der besetzten Zwischengitterplätze α_z bzw. Leerstellen α_e , wo ein A -Atom wie in der obengenannten Arbeit bewiesen wird, gleich

$$\alpha_z = \frac{c - c_0 + \sqrt{(c - c_0)^2 + 4\alpha^2}}{2},$$

$$\alpha_e = \frac{-(c - c_0) + \sqrt{(c - c_0)^2 + 4\alpha^2}}{2},$$

wo c die Zahl der B -Atome pro ein A -Atom, c_0 der Wert von c in der chemischen Verbindung und α eine das System charakterisierende Konstante (der Wert von $\alpha_z = \alpha_e$ bei $c = c_0$) bedeuten. Führen wir Diffusionskoeffizienten ein für die beiden Fehlordnungsarten, die natürlich verschiedene Werte haben werden, so ergibt sich, daß der Diffusionsstrom nicht einfach dem Gradienten von c proportional sein wird, sondern dem Gradienten einer linearen Kombination von $c - c_0$ und $\sqrt{(c - c_0)^2 + 4\alpha^2}$. Im zweiten Falle gilt ganz allgemein, wenn wir durch a die irgendwie normierte Aktivität der Substanz B bezeichnen

$$N_z^B \propto a, \quad N_e^B \propto \frac{1}{a}, \quad N_z^A \propto a^0, \quad N_e^A \propto \frac{1}{a^0}$$

(∞ bezeichnet proportional). Der Diffusionsstrom ist somit proportional dem Gradienten einer linearen Kombination dieser vier Größen. Im allgemeinen werden diese vier Glieder natürlich verschiedene Größenordnungen haben, so daß davon nicht alle gebraucht werden müssen. Ferner wird darauf hingewiesen, daß die Theorie nicht ohne weiteres auf Ionengitter anzuwenden ist, wo wir noch Ladungseffekte zu berücksichtigen haben.

Landau (Leningrad).

Ganguli, A.: On the velocity of unimolecular reaction. (*Chem. Labor., Univ., Benares.*) *Philosophic. Mag.*, VII. s. 12, 583—589 (1931).

Anschließend an seine früheren Arbeiten, untersucht der Verf. mit Hilfe der statistischen Methoden die Reaktionsgeschwindigkeit bei dem Prozeß $[AB] \rightarrow [AB]^* \rightarrow [A] + [B]$.

G. Rumer (Göttingen).

Lennard-Jones, J. E.: Cohesion. *Proc. phys. Soc. Lond.* 43, 461—482 (1931).

Niederschrift eines Vortrags vor der Physical Society, der in zusammenfassender, stark vereinfachter Weise das Gesamtgebiet der theoretischen Erklärung der Bindungskräfte behandelt.

Erwin Fues (Hannover).

Hall, Harvey, and J. R. Oppenheimer: Relativistic theory of the photoelectric effect. Pt. I. Theory of the K -absorption of X-rays. Pt. II. Photoelectric absorption of ultra-gamma radiation. *Physic. Rev.*, II. s. 38, 57—79 (1931).

Es wird eine Theorie des Photoeffekts für die Diracsche Gleichung entwickelt. Die Störungsintegrale bekommen dabei eine so komplizierte Gestalt, daß sie nur für den Spezialfall der K -Absorptionsgrenze in eine geschlossene, obgleich ungeheuer komplizierte Form gebracht werden können. Der Vergleich mit dem Experiment zeigt eine sogar größere Diskrepanz als die bekannten nichtrelativistischen Formeln, der von den Verff. durch die Vernachlässigung der Elektronenwechselwirkungen erklärt wird. Ferner wird der Fall sehr großer Frequenzen untersucht. Dabei wird für die Photoelektronen die Bindung vernachlässigt, was zu nur für leichte Elemente quantitativ gültigen Resultaten führt. Es ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt der K -Schale

$$\sigma = \frac{88\pi}{3} \left(\frac{Ze^2}{\hbar c} \right)^5 \frac{e^2}{mc\omega} = 1,910 \cdot 10^{-22} Z^5 \cdot \lambda \text{ cm}$$

(\hbar gleich $\frac{h}{2\pi}$, $\omega = 2\pi\nu$). Bei dem Vergleich mit dem Experiment werden andere Elektronen auf die Weise berücksichtigt, daß ihnen derselbe Wirkungsquerschnitt wie der K -Elektrone zugeschrieben wird, nur mit entsprechender Abschirmung für Z . Diese etwas ungewöhnliche Annahme wird nicht weiter begründet. Dasselbe gilt für die Anwendung einer für $\frac{Ze^2}{\hbar c} \ll 1$ abgeleiteten Formel für große Z .

Landau (Leningrad).

Wetzel, W.: The transmission of electrons through an electrical condenser. *Physic. Rev.*, II. s. 38, 1205—1208 (1931).

Der Transmissionskoeffizient für den Durchgang von Elektronen über eine abgeschrägte Potentialschwelle (Feld eines idealen Kondensators) wird wellenmechanisch streng berechnet. Das Hauptresultat ist, daß kein merklicher selektiver Effekt für bestimmte Relationen zwischen der Elektronengeschwindigkeit und den Dimensionen der Stufe besteht, entgegen einer früheren Vermutung [vgl. Frenkel, *Physic. Rev.* 38, 309 (1931); dies. Zbl. 2, 174]. Für alle in Betracht kommenden Verhältnisse liegt ferner der Koeffizient sehr nahe bei der Einheit.

Nordheim (Göttingen).

Bethe, H.: Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette. *Z. Physik* 71, 205—226 (1931).

Es wird eine Methode angegeben, um die Eigenfunktionen nullter und die Eigenwerte erster Näherung für das Heitler-London-Modell der linearen Atomkette zu berechnen. Sie wird zuerst ausführlich für den Fall von nur zwei nach rechts orientierten Spins erläutert und dann auf den Fall beliebig vieler nach rechts orientierter Spins ausgedehnt. Aus den Rechnungen zieht der Verf. den Schluß, daß im ferromagne-

tischen Fall (positives Austauschintegral) der energetisch günstigste Zustand dem Zusammenschluß sämtlicher Spins zu einem Wellenkomplex entspricht. — Es wird eine Anwendung der Methode für das räumliche Gitter sowie für Probleme der Kohäsion, des Ferromagnetismus und der Leitfähigkeit in Aussicht gestellt. *Bloch* (Kopenhagen).

Kronig, R. de L.: The quantum theory of dispersion in metallic conductors. II. (*Natuurk. Labor., Univ., Groningen.*) *Proc. roy. Soc. Lond. A* **133**, 255—265 (1931).

Solange man die Gitterschwingungen vernachlässigt, folgt aus der Vorstellung, daß sich die Metallelektronen in einem periodischen Kraftfeld befinden, daß sie zu zwei Arten anomaler Dispersion führen: Die eine entspricht den Übergängen zwischen Zuständen verschiedener „Zonen“ des Energiespektrums und gibt zur Absorption im Sichtbaren und Ultravioletten Anlaß, die zweite entspricht der auf der „Freiheit“ der Leitungselektronen beruhenden Resonanzfrequenz $\nu = 0$. Während nun die thermische Bewegung die erstere nur unwesentlich verändert, verhindert sie durch die Zusammenstöße mit dem Gitter die freie Bewegung der Elektronen und gibt so zu einer Verwaschung der Resonanzfrequenz $\nu = 0$ und damit zu einer Absorption im Ultraroten Anlaß. — Die in einer früheren Arbeit gemachten Untersuchungen werden ausgedehnt auf den Fall, wo die Frequenz des einfallenden Lichtes vergleichbar ist mit der mittleren Stoßfrequenz der Elektronen; die so erhaltenen Formeln für den Extinktions- und Brechungsexponenten gehen im Limes $\nu = 0$ in die klassischen Drudeschen über. Der Vergleich der Theorie mit den Messungen von Försterling und Freedericksz ergibt befriedigende Übereinstimmung. *Bloch* (Kopenhagen).

Fröhlich, Herbert: Der Schroteffekt nach der Quantenmechanik. (*Inst. f. Theoret. Phys., München.*) *Z. Physik* **71**, 715—719 (1931).

Der Verf. behandelt das Problem der Schwankungen des Glühelctronenstromes quantenmechanisch mittels der Methode der gequantelten Amplituden. In der Endformel tritt zum klassischen Wert noch ein Zusatzglied auf, das merkwürdigerweise nicht für tiefe Temperaturen, wie man erwarten würde, von Einfluß ist, sondern umgekehrt mit verschwindender Temperatur verschwindet. *Bloch* (Kopenhagen).

Takéuchi, Tokio: Dielectric constant and contact potential. *Proc. phys.-math. Soc. Jap.*, III. s. **13**, 208—210 (1931).

Es wird versucht einen Zusammenhang zwischen der Austrittsarbeit für Elektronen und der Dielektrizitätskonstanten bei Metallen anzugeben. *Nordheim*.

Persico, Enrico: La teoria del magnetismo. (*Torino, 18. III. 1930.*) *Conf. Fis. e Mat. Torino* 21—38 (1931).

Bitter, Francis: Magnetization and the magneto-caloric effect. (*Westinghouse Res. Labor., East Pittsburgh, Penn.*) *Physic. Rev.*, II. s. **38**, 528—548 (1931).

Unter der Annahme, daß sich in einem Ferromagneten kleine, spontan magnetisierte Blöcke befinden, die etwa 10^5 Atome enthalten und die sich zu größeren Gruppen, den „Barkhausen-Einheiten“ zusammenschließen, wird versucht, den Magnetisierungsprozeß durch zwei Prozesse zu erklären: Die Drehung der Magnetisierung in den „Barkhausen-Einheiten“ und die Drehung in den einzelnen Blöcken; letztere wird in Zusammenhang gebracht mit Akulovs „Schrumpfprozeß“. Ferner wird darauf aufmerksam gemacht, daß in starken äußeren Magnetfeldern die Änderung der spontanen Magnetisierung und die mit ihr verknüpfte Energieänderung vermutlich allein maßgebend sind für den magneto-kalorischen Effekt, und es wird gezeigt, daß man unter dieser Annahme eine befriedigende Erklärung der experimentellen Daten erhält. Die Abweichung der nach Akulovs Theorie berechneten Magnetisierungskurven von den experimentellen soll auf magneto-kalorischem Effekt beruhen, und es wird vorgeschlagen, dies an Einkristallen zu prüfen. *Bloch* (Kopenhagen).

Akulov, N. S.: Über magnetische Strukturanalyse. I. *Z. Physik* **71**, 764—777 (1931).

Der Wert der Magnetisierung, der bei einem Ferromagneten schon in schwachen Magnetfeldern erreicht werden kann und oberhalb dessen erst mit einer starken Krüm-

mung in der Magnetisierungskurve die stärkere Felder erfordernden Drehprozesse einsetzen, hängt in bekannter Weise von der Struktur der Substanz, insbesondere von der Verteilung der Richtungen leichtester Magnetisierbarkeit ab. Es wird darauf hingewiesen, daß diese Abhängigkeit umgekehrt dazu dienen kann, gewisse Schlüsse auf die innere Struktur zu ziehen, und dies wird an einigen Beispielen erläutert.

Bloch (Kopenhagen).

Condon, E. U., and P. M. Morse: Quantum mechanics of collision processes. I. Scattering of particles in a definite force field. Appendix, electron diffraction. (*Palmer Phys. Labor., Princeton Univ., Princeton.*) *Rev. of mod. Phys.* **3**, 43—88 (1931).

Die Arbeit gibt eine ausführliche Übersicht der allgemeinen Züge des Stoßvorgangs nach der Quantenmechanik in der von Dirac gegebenen Darstellung, wobei auch besonders eine eingehende Diskussion einfacher Potentialmodelle zum Teil von ähnlicher Art, wie sie von Gamow und von Condon und Gurney für die Behandlung des radioaktiven α -Zerfalls herangezogen wurden, gegeben wird. Der letzte von Morse verfaßte Abschnitt enthält eine eingehende theoretische Analyse der von Davisson und Germer entdeckten charakteristischen Reflexion von Elektronen, wobei ein Krystall als ein festes räumlich periodisches Potentialfeld behandelt wird. O. Klein. (Stockholm).

Astronomie und Astrophysik.

Barbier, D.: Fonction de répartition des excentricités et des anomalies moyennes des étoiles doubles visuelles à longue période dont l'orbite n'a pu encore être calculée. *C. r. Acad. Sci. Paris* **192**, 1635—1638 (1931).

H. N. Russell has shown that it is always possible to obtain mean value of excentricity for a group of wide binaries, whose orbits are unknown, supposing that mean anomalies are distributed at random. Instead of determining mean excentricity, the author proposes to find their frequency curve. Let e and u denote excentricity and excentric anomaly, j the angle between radius vector and reference plane, φ that between the orbital plane and normal to the reference plane. Then

$$\frac{e \sin u}{\sqrt{1-e^2}} = \lambda = \frac{\omega \sin \varphi + \sin j \cos \varphi}{\cos j}, \quad \frac{1-e \cos u}{1-e^2} = \mu = \sigma \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 j},$$

where $\omega = \varrho'/\varrho \Theta'$ and $\sigma = 1 - \varrho''/\varrho \Theta'^2$. It is supposed that ϱ , ϱ' , ϱ'' and Θ' are known from the observations, thus affording the frequency curve for ω and $\sigma = a(\omega, \sigma)$. The distribution of excentricities e and mean anomalies $g = N(e, g)$ can be determined as soon as that of λ and μ is known ($\Phi(\lambda, \mu)$), supposing that j and φ are distributed at random (since $N(e, g) = \Phi(\lambda, \mu) \frac{D(\lambda, \mu)}{D(e, g)}$). Φ is to be determined from the equation

$$\pi a(\omega, \sigma) = \int \int G(\lambda, \mu, \omega, \sigma) \Phi(\lambda, \mu) d\lambda d\mu,$$

where G is a function known apriori. By successive approximations the function Φ and therefore N can be determined from the data of observations. The author applies this method to 111 wide binaries of Greenwich Catalogue and finds distribution curves of e and mean anomalies separately. He obtains $\bar{e} = 0,58$ and $\sqrt{\bar{e}^2} = 0,62$ and mean period of the order of 700 years. Russell has found $\sqrt{\bar{e}^2} = 0,62$ for mean period of 2000 years. Taking into account well known increase of e with the period, it is seen, that Russell's value is too small, what is to be explained by his neglectation of the distribution of mean anomalies.

B. P. Gerasimovič (Charkow).

Cecchini, Gino: Sulla teoria delle variabili fondata sui postulati di Ritz-La Rosa. *Mem. Soc. astron. ital., N. s.* **5**, 429—443 (1931).

Sulla base delle attuali conoscenze parallattiche, sono mosse obiezioni di carattere spettroscopico e statistico alle conseguenze più immediate e fondamentali della teoria balistica delle stelle variabili, emessa e sostenuta dal prof. La Rosa. Fra l'altro, la legge quasi-sinusoidale della variazione delle velocità radiali osservate per le Ce-

feidi, appare inconciliabile colle premesse della teoria balistica; e quindi, per queste stelle, non è giustificabile la variabilità: non avrebbe perciò significato la dimostrazione qualitativa della legge di Miss Leavitt, data recentemente sulle basi della teoria stessa. Le obiezioni si conservano anche alterando i dati parallattici, su cui sono fondate, al di là di ogni ragionevole limite.

Autoreferat.

Seares, Frederick H.: Effect of space absorption on the calculated distribution of stars. (*Mount Wilson Observ., Carnegie Inst., Washington.*) *Astrophys. J.* **74**, 91 bis 100 (1931).

I. Die Beziehung zwischen der wahren Dichteverteilung $\Delta(\varrho)$ und der fiktiven $D(\varrho)$ (ϱ = Entfernung vom Beobachter) wird durch Einführung der Absorptionsfunktion hergestellt. D ist bei bekannter Verteilung der absoluten Leuchtkräfte leicht zu erhalten. A kann im Falle selektiver Absorption (wenigstens theoretisch) erhalten werden aus Abzählungen photographischer und photovisuelle Sterngrößen. — II. Es werden einige verschiedene Annahmen über die Absorption durchgerechnet. Auf Grund von Mount-Wilson-Sternzählungen ergibt sich, daß die Sternzahl in der Richtung zum galaktischen Zentrum wahrscheinlich wächst, daß andererseits die Absorption sowohl in galaktischer Länge wie auch in einer festen Richtung über genügend große Distanzen nicht konstant ist.

Heckmann (Göttingen).

Glissberg, W.: Die Masse-Leuchtkraft-Beziehung für homologe Sterne. (*Sternw., Univ. Breslau.*) *Astron. Nachr.* **243**, 307–310 (1931).

Der Verf. untersucht, unter welchen Bedingungen die Funktion $\psi(r)$ in dem von Vogt gegebenen Ausdruck für den Energiefluß in homolog aufgebauten Sternen

$$L(r) = \frac{4\pi c G}{k} M(r) (1 - \beta) \left[1 + \frac{\beta}{4 - 3\beta} \psi(r) \right] \quad \text{für } r \rightarrow 1,$$

d. h. an der Oberfläche verschwindet, welche Formen des Masse-Leuchtkraft-Gesetzes bei homologen Sternen also überhaupt vorkommen können. Es wird die Annahme gemacht, daß Gesamtdruck und Dichte an der Oberfläche gleichzeitig Null werden. Daraus glaubt der Verf. ableiten zu können, daß in der Grenze $r = 1$ stets $\psi = 0$ sein muß; nach seiner Ansicht kommt daher für homologe Sterne nur das Eddingtonsche Leuchtkraft-Masse-Gesetz $L \sim M^{7/5} \mu^{4/5} T_c^{4/5} (1 - \beta_0)^{3/2}$ in Frage.

Siedentopf (Jena).

Chandrasekhar, S.: The stellar coefficients of absorption and opacity. *Proc. roy. Soc. Lond. A* **133**, 241–254 (1931).

The atomic absorption coefficient α_ν for nuclei in an enclosure containing electrons obeying the Fermi-Dirac statistics is shown to be

$$\alpha_\nu = \frac{16\pi^2 Z^2 e^6 G k T}{3\sqrt{3} c h^4 \nu^3} \cdot \frac{e^{h\nu/kT}}{e^{h\nu/kT} - 1} \cdot \log \left[\frac{e^{h\nu/kT} (A + 1)}{e^{h\nu/kT} + A} \right],$$

where Ze is the charge on a nucleus, G is the "spin-weight", and A is given by the normalising condition

$$N_e = \frac{G(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{u^{1/2} du}{\frac{1}{A} e^u + 1}$$

where N_e is the number of electrons per unit volume. The other symbols are as usual. This result is based on the work of Kramers and Gaunt on the transition probabilities and takes account of the impossibility of transitions to occupied states. The mean of α_ν over the frequency range is defined, according to the application which is in view, either by

the "straight mean"

$$\alpha_a = \int_0^\infty \alpha'_\nu I_\nu d\nu / \int_0^\infty I_\nu d\nu \quad (\text{I})$$

or

$$\text{the "Rosseland mean" } \alpha_0, \text{ where } 1/\alpha_0 = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha'_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu / \int_0^\infty \frac{\partial I_\nu}{\partial T} d\nu \quad (\text{II})$$

where I_ν is the intensity of black-body radiation. By employing $\alpha'_\nu = \alpha_\nu(1 - e^{-h\nu/kT})$ in the integrals due account is taken of stimulated emission (Rosseland). For a non-degenerate gas

$$A \cong \frac{N_e h^3}{G} (2\pi m k T)^{-3/2} \ll 1$$

and in this case the quantities α_a, α_0 have the values

$$M\alpha_a = \frac{80}{\pi^2 \sqrt{3}} \cdot \frac{Z^2 e^6 h^2}{c (2\pi m)^{3/2}} \cdot \frac{N_e}{(kT)^{7/2}},$$

$$M\alpha_0 = \frac{8\pi^2 \vartheta_2}{315 \sqrt{3} \vartheta_1} \cdot \frac{Z^2 e^6 h^2}{c (2\pi m)^{3/2}} \cdot \frac{N_e}{(kT)^{7/2}}. \quad [\vartheta_1 = 1,0128; \vartheta_2 = 1,0823]$$

For a highly degenerate gas

$$\log A = \frac{h^2}{2m k T} \left(\frac{3 N_e}{4\pi G} \right)^{2/3} \gg 1$$

and the quantities α_a, α_0 have the values

$$D\alpha_a = \frac{80}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{c h (kT)^2},$$

$$D\alpha_0 = \frac{56}{15\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{c h (kT)^2}.$$

An alternative derivation of the last result, showing the physical reason for its independence of N_e , is given. Certain correction factors, suggested by the work of Gaunt, are discussed. These make $D\alpha_a, D\alpha_0$ slowly increasing functions of N_e . The reason for neglecting the "bound-free" transitions in a degenerate gas is stated. Applications to the theory of stellar structure are discussed, and indication obtained that Milne's "standard model" should well represent the degenerate core of a collapsed star.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Geophysik.

Goldsbrough, G. R.: The tidal oscillations in rectangular basins. Proc. roy. Soc. Lond. A **132**, 689—701 (1931).

G. I. Taylors Theorie der Gezeitschwingungen in einem rotierenden rechteckigen Becken gleichförmiger Tiefe war von Jeffreys kritisiert worden. Der Verf. greift das Problem auf eine andere Weise an, die allgemein und für alle Rotationsgeschwindigkeiten gilt. Im Fall langsamer Rotation lassen sich einfache Ausdrücke für die normalen Schwingungsformen und die entsprechenden Oberflächenverschiebungen jeder Ordnung ableiten. Das ermöglicht eine Diskussion des allgemeinen Charakters der Bewegung ohne numerische Rechnung. Die Ergebnisse sind: Es existieren sicherlich mehr als einfach unendlich viele verschiedene Normalschwingungsformen. Sie lassen sich in Paaren zusammenfassen, von denen die eine Welle das Becken in Richtung der Rotation umläuft, die andere entgegengesetzt. Bei verschwindender Rotation geht jede Schwingungsform in eine bekannte Form für den Fall nichtrotierenden Beckens über; es haben sich aber keine Formen ergeben, die bei abnehmender Rotation unendlich lange Perioden annehmen.

J. Bartels (Washington).

Foster, Ronald M.: Mutual impedance of grounded wires lying on the surface of the earth. Bell Syst. techn. J. **10**, 408—419 (1931).

Für zwei dünne isolierte Drähte, die an der Oberfläche der Erde liegen und an den Enden geerdet sind, wird eine Formel für die gegenseitige Impedanz abgeleitet; zunächst unter Benutzung Sommerfeldscher Ergebnisse über das elektrische Feld eines horizontalen elektrischen Dubletts, dann unabhängig aus den Grundgesetzen. Die Formel gilt für niedrige Frequenzen, bei denen alle Verschiebungsströme vernachlässigt werden können.

J. Bartels (Washington).